

第五届爱尖子物理能力测评试题

考试时间：180 分钟 满分：320 分

第一题（30 分）

「 Little prince: “This flower is a very complex creature…”」

Flower: “It is very cold where you live. In the place I came from--”」

Flower 生活在 B612 小行星的北极。为了让她感受到爱与温暖，Little Prince 从 Flower 所在的地方直接跑到了北纬 45° 处。终于有一天，当阳光直射到玫瑰花上时，她绽放了：

「 One morning, exactly at sunrise, she suddenly showed herself.」

B612 的自转与公转方向是一致的，因此黄赤交角为 0 。Flower 清楚阳光是 Little Prince 利用自己相对 B612 位置的改变换来的，她在这一天才隐约感受到 Little Prince 的爱。但是 Little Prince 已经为此在这个固定的位置坚守了很久。当 Flower 数出这段时间有多少天时，终于明白了这是 Little Prince 的表白。论证一下，小王子到底等了几天（精确到个位即可）？一天按一个（B612 上的）太阳日计，并且假设 B612 的公转周期远大于自转周期。

由于 Little Prince 的质量与 B612 相比很小，和电子 - 质子质量比差不多。Flower 很纤细，质量可以忽略。



第二题（40 分）

我们希望束缚质量为 m ，电荷为 $+q$ 的带电粒子。

1. 设若真空中存在电势分布 $\Phi = \lambda(ax^2 + by^2 + cz^2)$ ，则 a ， b 和 c 间应满足什么条件？
2. 接下来取 $a=1$ ， $b=1$ 和 $c=-2$ ，假设正极上所加电压为 U_0 ，负极上所加电压为 $-U_0$ ，则该使用什么形状的电极，以实现这样的电势分布？
3. 一种常见的离子阱是 Paul Trap，它通过施加一个交变电磁场实现粒子的束缚。我们取 $\lambda = \frac{U_0 + V_0 \cos \omega t}{2d^2}$ ，并且认为交变电场的频率 ω 很高，以至于带电粒子的运动 $\vec{r}$ 可以视为由两个部分组成，其中一个部分是幅度较大但频率较低的部分 $\vec{R}$ ，而另一个部分是幅度较小但是频率较高的部分 $\vec{\xi}$ 。近似地， $\vec{\xi}$ 仅取决于频率为 ω 的交变电场，而在 $\vec{\xi}$ 的一个周期中， $\vec{R}$ 不变。试求在 $\vec{\xi}$ 的一个周期内进行平均后， $\vec{R}$ 的运动方程。
4. 可见，在高频作用下， $\vec{R}$ 的运动方程可以由一等效的简谐势给出。求出该等效的简谐势，该带电粒子的振动频率，并且给出束缚带电粒子的条件。
5. “钟慢效应”和粒子的速度有关。能否利用 $\dot{\vec{R}}$ 讨论带电粒子的钟慢效应？

第三题（60 分）

为了让地球脱离太阳的引力束缚，飞出太阳系流浪，利用引力弹弓效应加速地球是关键一步。未来，经过不断的努力，假设人类已经将地球推到了太阳系较边缘的位置做圆周运动公转，即在太阳风层顶位置，轨道半径约为 100AU 。为了做到这一点，人类已经付出了巨大的努力推进地球。利用核聚变技术，人类已经将地球上大量的岩石物质用作核聚变燃料，转化为推进所需的能量。因此地球半径随着不断的流浪逐渐变小，很容易受到星际中各种物质的影响，而利用好这些星际物质是此时地球飞出太阳系的当务之急。



现在有一颗质量较大的彗星在太阳系中以偏心率为 e 的椭圆轨道运行， $e = 0.8$ ，轨道的半长轴为此时地球公转轨道半长轴的 3 倍，彗星的质量是此时地球质量的 2 倍，且彗星的公转在地球黄道面内，公转方向也与地球相同。将当前地球绕太阳公转视为圆周运动，公转半径为 1 个天文单位，即 1AU 。

1. 地球上的燃料即将耗尽，因此不能再通过消耗自身燃料加速飞出太阳系，只能做小幅度的运动方向调整，因此地球可以通过彗星的引力弹弓加速效应加速。由开普勒第三定律可以知道，地球此时的公转周期与卫星的公转周期之比为无理数，因此若干个周期后地球必然会与彗星发生近距离的引力相互作用，通过提前微调地球的运动方向，可以控制地球相对彗星的瞄准半径（即地球相对彗星入射速度的延长线与彗星中心的垂直距离）。通过计算，找出最佳的引力弹弓方案，计算加速后地球在太阳系中的速度。地球有可能通过引力弹弓加速脱离太阳引力场吗？假设在地球与彗星作用过程中，太阳的引力影响相比可以忽略不计。

2. 求地球与彗星作用过程中两者之间的最小距离，用 AU 表示。

3. 设彗星内部结构可以处理成流体，不能存在负压力，否则彗星解体，会对地球造成致命打击。求彗星半径的上限，即洛西极限，用 AU 表示。不计彗星自转。

第四题（40 分）

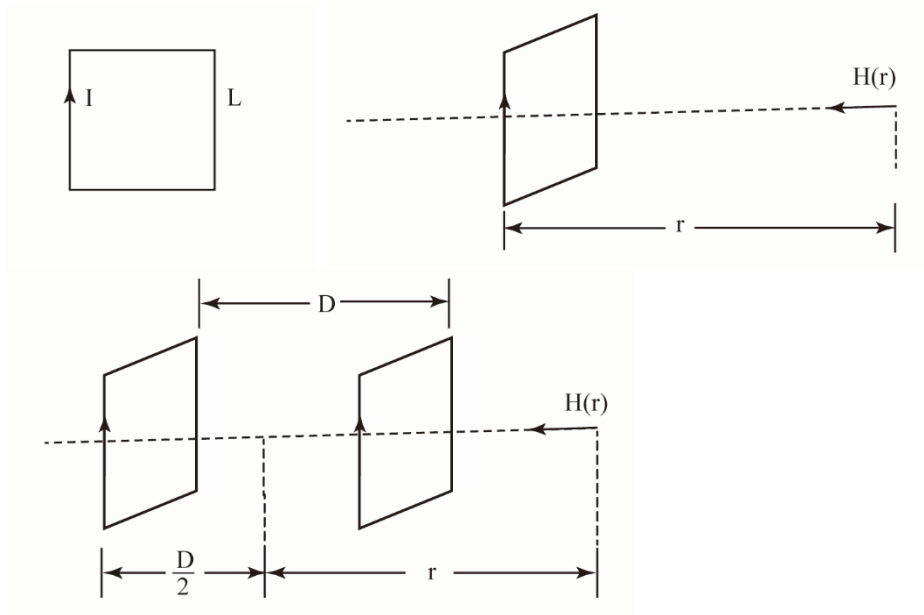
有一个正方形线圈，通有电流 I

- （1）求轴线上任意一点的磁场 $H(r)$ 。
- （2）再取一个相同的正方形线圈，两线圈相距为 D ，求此时轴上任意一点的磁场 $H(r)$
- （3）现希望在两线圈中点附近获得一个较为均匀的磁场，求此时 D 为多少？

提示：将（2）的结果记为 $H_2(r)$ 为了保证能获得一个较为均匀的磁场，可以采取泰勒展开的方式，将 $H_2(r)$ 展开。

利用高阶小量远小于低阶小量的特性，尽可能保证除了第一项 $H_2(0)$ 以外的项为 0 即可。

- （4）求（3）题状态下轴上任意一点的磁场 $H(r)$ 。



第五题 (40 分)

在历史上, 光的研究首先是从几何光学开始的。通过研究光线的传播, 发现了可以描述其传播方式的方程。光学介质的分布很大程度上决定了光的传播, 介质的不同性质直接展示出了各种绚丽多彩的光学现象。本题中, 我们就要来讨论常见的光学介质的各类性质的机制、特点与应用。

A

生活中常常可以见到自然变折射率引发的光学现象, 如扁平的落日、海市蜃楼等等。人工变折射率也有广泛的应用, 如光纤和各类光学成像仪器。我们先研究在不均匀介质中光线的传播。假设介质折射率变化的尺度远远大于光的波长, 即忽略光的波动性引起的效应, 只考虑几何光线。

(1) 已知在介质中光线传播满足如下轨迹方程:

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1)$$

其中 $\mathbf{r}$ 表示波前位置, n 表示介质折射率, ds 表示光线轨迹的线元。引入参量 $dt = \frac{ds}{n}$, 那么可以推导得出, 光线的传播轨迹和一个非相对论粒子在一个保守势场中的运动轨迹相同, 势场 $V(\mathbf{r})$ 由折射率 $n(\mathbf{r})$ 直接决定, t 就是粒子的运动时间。求势场与折射率间的关系。设粒子的质量为 1。

(2) 在球对称势场中, 粒子运动的角动量守恒。结合 (1) 的结果, 试推出在球对称光学介质中光线的轨迹所满足的方程。

(3) 直接由 (1) 式, 试推出在球对称光学介质中光线的轨迹所满足的方程。(9 分)

(4) 现在给出绝对仪器的一个简单而有趣的例子。设用以表征媒质的折射率函数

$$n(r) = \frac{1}{1 + (r/a)^2} n_0 \quad (2)$$

式中 r 代表从固定点 O 算起的距离, n_0 和 a 都是常数。它通常称为“鱼眼”, 麦克斯韦首先对此进行了研究。

建立极坐标系, 求出通过初始点 $P_0(r_0, \theta_0)$ 的光线 (实际上是一族光线)。答案中可以含一个你自己设定的未定参量。

(5) 说明无论何种情况, 光线都是一个圆, 并改在直角坐标下写出光线的方程, 求出圆的半径和圆心位置的表达式。答案中可以包含你在上一问设定的参量。

(6) 从 (4) 中你求出的答案可以发现, 来自一个任意点 P_0 的所有光线均相交于另外一个点, 即“鱼眼”是一种绝对仪器, 成像是一个反演。求出这个点 P_1 的位置。

可能用到的积分公式:

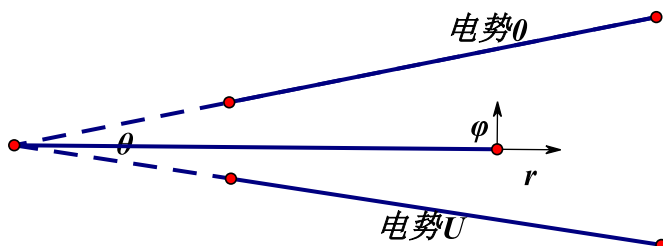
$$\frac{K(1+\rho^2)}{\rho\sqrt{\rho^2-K^2(1+\rho^2)^2}} = \frac{d}{d\rho} \left[\arcsin \left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}} \frac{\rho^2-1}{\rho} \right) \right]$$

第六题（80 分）

航天飞船

我国的航天事业蒸蒸日上，航天飞船是探索宇宙最重要的工具之一。航天飞船常常游弋于远离星体的真空之中，在那里的环境与地球上会有很多不同。因此，人们需要进行额外的设计，使得航天飞船能够安全高效地执行人们赋予它的任务。

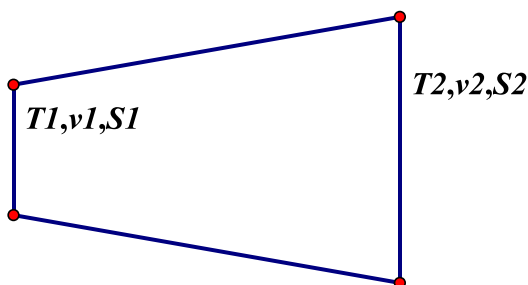
A 部分 飞船的燃料箱



(A1) 由于失重，宇宙飞船中的燃料常常不是沉积在燃料箱的底部，而是漂浮在整个燃料箱中。如果我们对其置之不理，这就会影响正常燃料的供应，进而会产生非常严重的后果。在这里，使用极化力进行控制是一个非常有效的方法。如右图所示，两块非常大的极板，之间成一个较小的角度 θ ，两极板之间的电压是 U ，极板间有相对介电常数为 ϵ_r 的气体燃料。使用合理的近似求出极板之间的电场分布 $\vec{E} = \vec{E}(r, \phi, z)$ 。（已知 r, ϕ, z 三个坐标对应的单位矢量为 $\hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z$ ，并且它们构成右手螺旋）

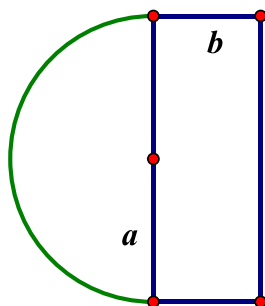
(A2) 假设外加电压为 $U(t) = U_0 \cos \omega t$ 。求出处在 r, ϕ, z 处单位体积气体所受平均极化力 $\vec{f} = \vec{f}(r, \phi, z)$ 。

B 部分 喷射燃料



(B1) 喷气发动机喷嘴处如右图所示，高温气体从左侧进入，随后从右侧喷出。已知进口和出口的气体温度为 T_1 和 T_2 ，进口气流速度为 v_1 ，进口截面积为 S_1 。由于气体流速很快，近似认为和喷嘴无热交换，并且认为气体不受摩擦阻力，气体经历了准静态过程。试求出出口截面积 S_2 以及气体流速 v_2 。可以使用上述已知量以及定体摩尔热容 $C_{m,v}$ 以及气体的摩尔质量 μ 表示你的答案。

C 部分 航天飞船的转向



(C1) 右图所示，是飞船的简化截面，飞船头部为半径是 a 的半球，尾部是高是 b ，半径也是 a 的圆柱体。假设飞船的质量仅仅分布在外表面，（内部没有质量，包括半球和圆柱体的交界面也是没有质量的）且单位面积的质量处处相同，都是 σ 。飞船的主推进器位于飞船的尾部（也就是圆柱体的在图中的右表面）。人们常常需要改变飞船航向，因此需要在飞船上安装转向发动机。显然不能将转向发动机朝向飞船自身喷射。已知转向发动机最大推力为 F ，请问将转向放置在何处可以获得最大的转向角加速度？

D 部分 切换轨道

(D1) 有一航天飞船位于地球的同步卫星轨道上。现在飞船接到命令，需要切换到月球轨道上，成为月球的卫星。现在我们仅需要考虑飞船到月球轨道这一过程。已知地球质量为 M ，地球自转角速度，月球公转角速度分别是 ω_0, Ω_0 。记飞船原本速度为 v_0 ，喷气后速度改为 $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_0$ 试求出 $|\vec{u}|$ 的最小值并证明。

第七题（30 分）

高速运动的物体因为相对论效应和光行差效应的影响，在人眼看来会发生形状上的畸变。

伽莫夫的著名科普读物《物理世界奇遇记》里有这样一段描述：汤普金斯先生来到一座奇异的都市，由于这城市里的光速异乎寻常地小，当他以骑自行车高速行驶时，发现周围一切都变扁了。汤普金斯的见闻，十年来被物理学家们认为是正确的。即由于洛伦兹收缩，只要能以接近光速的速度运动，我们将看到一个扁的世界。直到 1959 年，James Torrell 发表的一篇文章，才开始纠正了这个错误认识。其实尺缩效应的形象是人们观测物体上各点对观察者参考系同一时刻的位置构成的形象，可称为“测量形象”，而不是物体产生的“视觉形象”。我们看到的（或照相机拍摄的）形象，是由物体上各点发出后“同时到达”眼睛（或照相机）的光线所组成，而这些光线并不是同时自物体发出的。下面我们定性与定量结合，来研究这种相对论效应。

1. 考虑一个半径为 a 的发光圆盘，在自身所在平面内沿一个方向做高速运动，速度为 βc 。观察者距离这个平面距离 a ，他的正下方就是这个平面的法线方向。在观察者系中 $t=0$ 时，观察者系中圆心正好在他正下方。那么观察者在看到圆心在他正下方的一瞬间，圆盘边缘形状是怎样的？求出其方程，并且在 $\beta=0.99$ 时借助坐标纸和计算器做图。将观察者视为一个点， a 作为单位长度。

2. 考虑另外一种情况，观察者近似位于圆盘所在的平面内的无穷远处观察圆盘沿垂直于观察者视线方向上的高速运动，这种情况下，观察者在垂直于圆盘平面方向上的偏移可以忽略不计。试证明，此时观察者所看到的圆盘边缘形状是一个椭圆，作出其示意图，并求出长短轴方向和其各自长度。（这就是 Torrell 转动）