【赢在高考•黄金20卷】备战2021高考数学全真模拟卷（新高考专用）

第一模拟

注意事项：

本试卷满分150分，考试时间120分钟．答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、班级等信息填写在试卷规定的位置．

一、单项选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分)

1.（**2020·**山东高三其他模拟）已知集合 $A=\left\{x\,|\,2^x>1\right\}$，$B=\left\{x\,|\,x^2+5x-6<0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left(-1,0\right)$　　**B.** $\left(0,6\right)$　　**C.** $\left(0,1\right)$　　**D.** $\left(-6,1\right)$

【答案】C

【详解】

$A=\left\{x\,|\,2^x>1\right\}=\left\{x\,|\,2^x>2^0\right\}=\left\{x\,|\,x>0\right\}$，

$B=\left\{x\,|\,x^2+5x-6<0\right\}=\left\{x\,|\,(x+6)(x-1)<0\right\}=\left\{x\,|\,-6<x<1\right\}$，$\therefore A\cap B=\left(0,1\right)$．

故选：C.

2.（**2020·**山东高三其他模拟）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{n}=1$，则 $n>m>0$ 是双曲线 C 的离心率大于 $\sqrt{2}$ 的（　　）

A. 充分不必要条件　　**B.** 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　**D.** 既不充分也不必要条件

【答案】A

【详解】

解：因为双曲线$C:\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1$，若$n>m>0$，则$a^2=m$，$b^2=n$，$c^2=a^2+b^2=m+n$，所以

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{m+n}{m}}>\sqrt{\frac{2m}{m}}=\sqrt{2}$，故充分性成立；

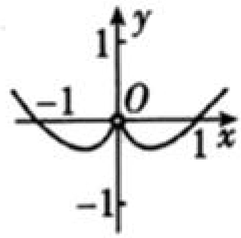
若$n<m<0$，则$a^2=-n$，$b^2=-m$，$c^2=a^2+b^2=-(m+n)$，所以$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{-(m+n)}{-n}}>\sqrt{\frac{2n}{n}}=\sqrt{2}$，

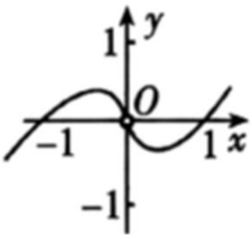
故必要性不成立；

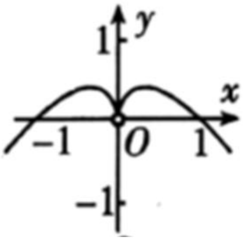
故$n>m>0$是双曲线C的离心率大于$\sqrt{2}$的充分不必要条件，

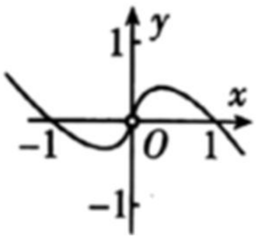
故选：A

3．（2020·山东高三三模）函数$f(x)=\frac{(3^x-1)\ln x^2}{3^x+1}$的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【详解】

因为 $f(-x)=\dfrac{\left(3^{-x}-1\right)\ln(-x)^2}{3^{-x}+1}=-\dfrac{\left(3^{x}-1\right)\ln x^2}{3^{x}+1}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数，故排除 A，C；

因为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(3^{\frac{1}{2}}-1\right)\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{3^{\frac{1}{2}}+1}$，且 $3^{\frac{1}{2}}-1>0,3^{\frac{1}{2}}+1>0,\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)^2<0$，

所以 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，

故选：B

4．（2020·山东）已知 $a>b>0$，若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，$a^b=b^a$，则 $\dfrac{a}{b}=$（　　）

A．$\sqrt{2}$　　　B．2　　　C．$2\sqrt{2}$　　　D．4

【答案】B

【详解】

对 $a^b=b^a$ 两边取以 a 为底的对数得 $\log_a a^b=\log_a b^a$，即 $b=a\log_a b$，同理有 $a=b\log_b a$，

代入 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$ 中得 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{2}$，　因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{a}{b}>1$，令 $t=\dfrac{a}{b},t>1$，

则 $t+\dfrac{1}{t}=\dfrac{5}{2}$，整理可得 $2t^2-5t+2=0$，解得 $t=2$ 或 $t=\dfrac{1}{2}$（舍去）所以 $\dfrac{a}{b}$=2，

故选：B

5．（2020·山东高三其他模拟）1943 年，我国病毒学家黄祯祥在美国发表了对病毒学研究有重大影响的论文“西方马脑炎病毒在组织培养上滴定和中和作用的进一步研究”，这一研究成果，使病毒在试管内繁殖成为现实，从此摆脱了人工繁殖病毒靠动物、鸡胚培养的原始落后的方法.若试管内某种病毒细胞的总数 y 和天数 t 的函数关系为：$y=2^{t-1}$，且该种病毒细胞的个数超过 10^8 时会发生变异，则该种病毒细胞实验最多进

行的天数为（　　）天（$\lg 2 \approx 0.3010$）

A．25　　**B．26**　　**C．27**　　**D．28**

【答案】C

【详解】

取 $y=2^{t-1}=10^8$，故 $t-1=\log_2 10^8=8\log_2 10$，即 $t=8\log_2 10+1=8\left(\dfrac{1}{\lg 2}\right)+1\approx 27.6$，

故该种病毒细胞实验最多进行的天数为 27．

故选：C．

6．（2020·全国高三月考（文））已知 ABC 中，点 M 是线段 BC 上靠近 B 的三等分点，N 是线段 AC 的中点，则 $\overrightarrow{BN}=$（　　）

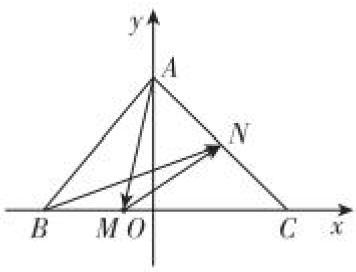
A．$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$　　B．$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}$

C．$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MN}$　　D．$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MN}$

【答案】C

【详解】

不妨设 ABC 为等腰直角三角形，其中 $\angle BAC=90^\circ$，以线段 BC 所在直线为 x 轴，线段 BC 的垂直平分线 AO 为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系；



设 $AC=3\sqrt{2}$，故 $B(-3,0)$，$N\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，

故 $\overrightarrow{BN}=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$，$M(-1,0)$，$A(0,3)$，

故 $\overrightarrow{AM}=(-1,-3)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$，

设 $\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{AM}+y\overrightarrow{MN}$，

则 $\begin{cases}\frac{9}{2}=-x+\frac{5}{2}y\\ \frac{3}{2}=-3x+\frac{3}{2}y\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=2\end{cases}$，

故 $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{MN}$．

故选：C

7．（2020·全国高三专题练习）已知点 A,B,C 在半径为 2 的球面上，满足 $AB=AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，若 S 是球面上任意一点，则三棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值为（　　）

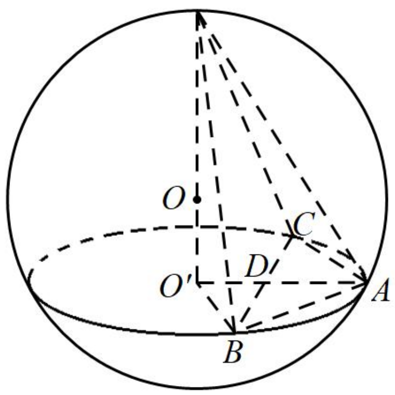
A． $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$　　**B．** $\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$　　**C．** $\frac{2+3\sqrt{3}}{12}$　　**D．** $\frac{3+\sqrt{3}}{12}$

【答案】A

【详解】

设　ABC 外接圆圆心为 O'，三棱锥 $S-ABC$ 外接球的球心为 O，$AB=AC=1$，

设 D 为 BC 中点，连 AD，如图，



则 $AD \perp BC$，且 O' 在 AD 上，$AD=\sqrt{AB^2-(\frac{BC}{2})^2}=\frac{1}{2}$，

设 ABC 外接圆半径为 r，

$r^2=(\frac{BC}{2})^2+(AD-r)^2=\frac{3}{4}+(\frac{1}{2}-r)^2$，解得 $r=1$，

$\therefore |OO'|=\sqrt{2^2-r^2}=\sqrt{3}$

要使 $S-ABC$ 体积的最大，需 S 到平面 ABC 距离最大，

即 S 为 $O'O$ 的延长线与球面的交点，最大值为 $\sqrt{3}+2$，

所以三棱锥 $S-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times(\sqrt{3}+2)S_{ABC}=\frac{1}{3}\times(\sqrt{3}+2)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{3+2\sqrt{3}}{12}$.

故选：A

8.（2020·广东广州·高三月考）已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）**的焦点为** F，**准线为** l，**过** F **的直线交抛物线于** A，B **两点，作** $AM\perp l$，$BN\perp l$，**垂足分别为** M，N，**若** $|MF|=4$，$|NF|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，**则** $|AB|=$

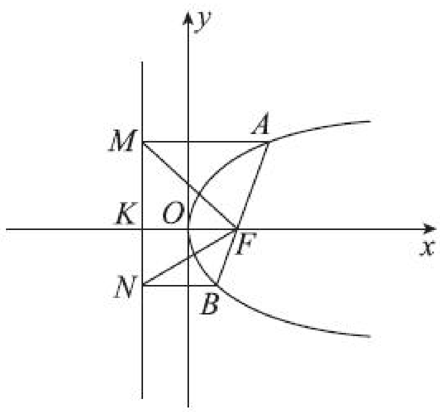
（　　）

A. $\frac{10}{3}$　　**B．4**　　**C．5**　　**D.** $\frac{16}{3}$

【答案】D

【详解】

解：如图所示，



由题意知：l：$x=-\frac{p}{2}$，$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 AB：$x=my+\frac{p}{2}$，

则 $M\left(-\frac{p}{2},y_1\right)$，$N\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，

由 $\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+\frac{p}{2} \end{cases}$，

得：$y^2-2pmy-p^2=0$，

$\therefore y_1+y_2=2pm$，$y_1y_2=-p^2$，

$\because |MF|^2=p^2+y_1^2=16$，$|NF|^2=p^2+y_2^2=\frac{16}{3}$，

$\therefore p^4=(16-p^2)\left(\frac{16}{3}-p^2\right)$，

解得：$p=2$，

设抛物线准线l交x轴于K，

则$\left|KF\right|=p=2$，在$\mathrm{Rt}\triangle MFK$中，可得$\cos\angle MFK=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$\angle MFK=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore\triangle AMF$是等边三角形，

$\therefore m=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y_1+y_2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\left|AB\right|=x_1+x_2+p=m\left(y_1+y_2\right)+2p=\frac{16}{3}$.

故选：D.

二、多项选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分)

9．（2020·海口市第四中学高二期中）下面关于$f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$叙述中正确的是（　　）

A．关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称

B．关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称

C．在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

D．函数$f\left(x\right)$的零点为$\frac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in Z\right)$

【答案】AC

【详解】

对于选项 A：$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，选项 A 正确；

对于选项 B：$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=0$，不是最值，选项 B 错误；

对于选项 C：由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow k\pi-\frac{\pi}{12}\le x\le k\pi+\frac{5\pi}{12}\left(k\in Z\right)$，

则 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right]\left(k\in Z\right)$，

又 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 显然是 $\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$ 的子集，则选项 C 正确.

对于选项 D：由 $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ 得 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in Z$，所以 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，则选项 D 错误.

故选：AC.

10．（2020·河北正中实验中学高二月考）在发生公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间内没有发生大规模群体感染的标志为“连续 10 天，每天新增疑似病例不超过 7 人”.过去 10 日，*A*、*B*、*C*、*D* 四地新增疑似病例数据信息如下，一定符合没有发生大规模群体感染标志的是（　　）

A．*A* 地：中位数为 2，极差为 5

B．*B* 地：总体平均数为 2，众数为 2

C．*C* 地：总体平均数为 1，总体方差大于 0

D．*D* 地：总体平均数为 2，总体方差为 3

【答案】AD

【详解】

对 A,因为甲地中位数为 2,极差为 5,故最大值不会大于 $2+5=7$.故 A 正确.

对 B,若乙地过去 10 日分别为 $0,0,0,2,2,2,2,2,2,8$ 则满足总体平均数为 2, 众数为 2, 但不满足每天新增疑似病例不超过 7 人, 故 B 错误.

对 C, 若丙地过去 10 日分别为 $0,0,0,0,0,0,0,0,1,9$,则满足总体平均数为 1, 总体方差大于 0, 但不满足每天新增疑似病例不超过 7 人, 故 C 错误.

对 D,利用反证法,若至少有一天疑似病例超过 7 人, 则方差大于 $\frac{1}{10}\times(8-2)^2=3.6>3$. 与题设矛盾, 故连续 10 天, 每天新增疑似病例不超过 7 人. 故 D 正确.

故选：AD

11.（2020·德州市第一中学高二月考）对于二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^n\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n\left(n\in N^*\right)$，以下判断正确的有（　　）

A．存在 $n\in N^*$，展开式中有常数项

B．对任意 $n\in N^*$，展开式中没有常数项

C．对任意 $n\in N^*$，展开式中没有 x 的一次项

D．存在 $n\in N^*$，展开式中有 x 的一次项

【答案】 AD

【详解】

解：对于二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^n$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_n^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{n-3r}{2}}$， $r=0,1,2,\cdots,n$，

而 $\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n$ 的通项公式为 $T_{k+1}=C_n^k\cdot x^{4k-n}$， $k=0,1,2,\cdots,n$.

对于二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x}\right)^n\left(\frac{1}{x}+x^3\right)^n\left(n\in N^*\right)$，展开式的通项为 $C_n^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{n-3r}{2}}\cdot C_n^k\cdot x^{4k-n}$，

未知数的次数为 $\frac{n-3r}{2}+4k-n=-\frac{3}{2}r-\frac{n}{2}+4k$

当$-\frac{3}{2}r-\frac{n}{2}+4k=0$时，即$3r+n=8k$，当$r=1$，$k=1$，$n=5$是其中一组解，由于$C_n^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{n-3r}{2}}\cdot C_n^k\cdot x^{4k-n}$的各项的系数都是正数，故展开式中有常数项，且常数项的系数不为0，故A正确，B错误，

当$-\frac{3}{2}r-\frac{n}{2}+4k=1$时，即$3r+n+2=8k$，当$r=0$，$k=1$，$n=6$是其中一组解，由于$C_n^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{n-3r}{2}}\cdot C_n^k\cdot x^{4k-n}$的各项的系数都是正数，故展开式中有一次项，且一次项的系数不为0，展开式中有一次项，故D正确，C错误，

故选：AD.

12.（2020·福建莆田一中高三期中）设函数$f\left(x\right)=a^x-x^a\left(a>1\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，已知$f\left(x\right)$有且只有一个零点，下列结论正确的有（　　）

A． $a=e$

B． $f\left(x\right)$**在区间**$\left(1,e\right)$**单调递增**

C． $x=1$**是**$f\left(x\right)$**的极大值点**

D． $f\left(e\right)$**是**$f\left(x\right)$**的最小值**

【答案】ACD

【详解】

$f(x)$只有一个零点，即方程$a^x-x^a=0$在$(0,+\infty)$上只有一个根，$a^x=x^a$，取对数得$x\ln a=a\ln x$，即$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$只有一个正根．

设$h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当$0<x<e$时，$h'(x)>0$，$h(x)$递增，$x\to 0$时，$h(x)\to-\infty$，$x>e$时，$h'(x)<0$，$h(x)$递减，此时$h(x)>0$，

$h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$．

∴要使方程$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$只有一个正根．则$\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{e}$或$\frac{\ln a}{a}<0$，解得$a=e$或$a<0$，又∵$a>1$，∴$a=e$．A正确；

$f(x)=e^x-x^e$，$f'(x)=e^x-ex^{e-1}$，

$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=0$，$e^{x-1}=x^{e-1}$，取对数得 $x-1=(e-1)\ln x$，

易知 $x=1$ 和 $x=e$ 是此方程的解.

设 $p(x)=(e-1)\ln x-x+1$，$p'(x)=\dfrac{e-1}{x}-1$，当 $0<x<e-1$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 递增，$x>e-1$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 递减，$p(e-1)$ 是极大值，

又 $p(1)=p(e)=0$，

所以 $p(x)$ 有且只有两个零点，

$0<x<1$ 或 $x>e$ 时，$p(x)<0$，即 $(e-1)\ln x<x-1$，$x^{e-1}<e^{x-1}$，$ex^{e-1}<e^x$，$f'(x)>0$，同理 $1<x<e$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(e,+\infty)$ 上递增，在 $(1,e)$ 上递减，所以极小值为 $f(e)=0$，极大值为 $f(1)$，

又 $f(0)=1$，所以 $f(e)$ 是最小值．B 错，CD 正确．

故选：ACD．

三、**填空题**(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．（2020·山东潍坊市·高一期中）已知偶函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上单调递增，且 1 是它的一个零点，则不等式 $f\left(x-2\right)<0$ 的解集为______.

【答案】 $\left\{x\middle|1<x<3\right\}$

【详解】

因为 1 是函数 $f\left(x\right)$ 的一个零点，所以 $f\left(1\right)=0$，

因为函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数，所以 $f\left(x-2\right)=f\left(\left|x-2\right|\right)$，

所以由 $f\left(x-2\right)<0$，可得 $f\left(\left|x-2\right|\right)<f(1)$，

又因为函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以有 $|x-2|<1$，解得 $1<x<3$.

故答案为：$\{x|1<x<3\}$

14．（2020·河南高二月考（理））在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{7}$，$\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$，则 $b=$______.

【答案】 1

【详解】

由 $\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$，则 $c=3b$

根据余弦定理可得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $7=b^2+9b^2-3b^2=7b^2$，

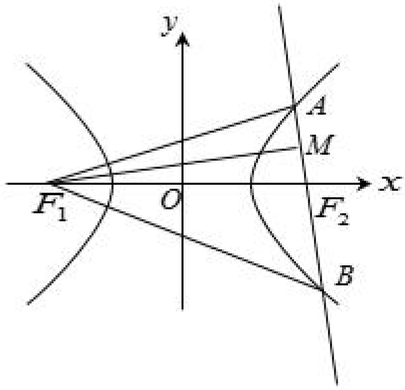
解得 $b=1$ 或 $b=-1$（舍去）.

故答案为：1

15．（2020·江西景德镇一中高二期中）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，设过 F_2 的直线 l 与 C 的右支相交于 A，B 两点，且 $|AF_1|=|F_1F_2|$，$|BF_2|=2|AF_2|$，则双曲线 C 的离心率是______.

【答案】 $\frac{5}{3}$

【详解】



如图：设 AF_2 的中点为 M，连接 F_1M， BF_1，

因为 $|AF_1|=|F_1F_2|=2c$， M 为 AF_2 的中点，所以 $F_1M\perp AF_2$，

由 $|AF_1|-|AF_2|=2a$，得 $|AF_2|=2c-2a$，

所以 $|MF_2|=\frac{1}{2}|AF_2|=c-a$，

在 $\triangle MF_1F_2$ 中， $\cos\angle BF_2F_1=\frac{|MF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{c-a}{2c}$ ，

$|BF_2|=2|AF_2|=4c-4a$，所以 $|BF_1|=2a+|BF_2|=4c-2a$，

在 $\triangle BF_1F_2$ 中， $\cos\angle BF_2F_1=\frac{|F_1F_2|^2+|BF_2|^2-|BF_1|^2}{2\times|F_1F_2||BF_2|}=\frac{4c^2+16(c-a)^2-4(2c-a)^2}{2\times 2c\times 4(c-a)}$

$=\frac{4c^2+12a^2-16ac}{16c(c-a)}$，

因为 $\angle BF_2F_1+\angle MF_2F_1=\pi$， $\cos\angle BF_2F_1+\cos\angle MF_2F_1=0$，

所以 $\frac{c-a}{2c}+\frac{4c^2+12a^2-16ac}{16c(c-a)}=0$，

整理可得： $16a^2-16ac+12c^2=0$，即 $5a^2-8ac+3c^2=0$，

所以$5a^2-8ac+3c^2=0$，即$(5a-3c)(a-c)=0$，

所以$5a=3c$或$a=c$（舍），

所以离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$，

故答案为：$\frac{5}{3}$

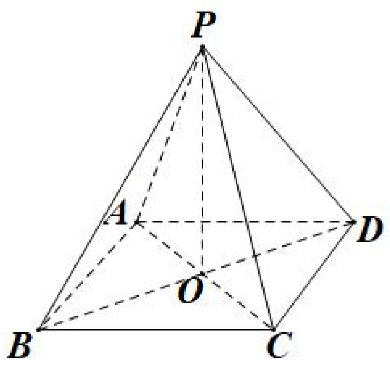
16．（2020·山东高二期末）在棱长为6的正方体空盒内，有四个半径为r的小球在盒底四角，分别与正方体底面处交于某一顶点的三个面相切，另有一个半径为R的大球放在四个小球之上，与四个小球相切，并与正方体盒盖相切，无论怎样翻转盒子，五球相切不松动，则小球半径r的最大值为________；大球半径R的最小值为________.

【答案】$\frac{3}{2}$　　$\frac{15}{8}$

【详解】

当四个半径为r的小球相切时，小球的半径最大，大球的半径最小，

如图所示：



四个小球的球心和大球的球心构成一个正四棱锥$P-ABCD$，

所以4r=6，解得$r=\frac{3}{2}$，

其中 $PA=R+\frac{3}{2},AB=2r=3,OA=\frac{3\sqrt{2}}{2},OP=6-R-r=\frac{9}{2}-R$，

在 $Rt\ \ PAO$ 中，$PA^2=OA^2+OP^2$，

即 $\left(R+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}-R\right)^2$，

解得 $R=\frac{15}{8}$，

故答案为：（1）$\frac{3}{2}$；（2）$\frac{15}{8}$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分)

17.（2020·山东师范大学附中高三学业考试）在① $2S_{n+1}=S_n+1$，② $a_2=\frac{1}{4}$，③ $S_n=1-2a_{n+1}$ 这三个条件中选择两个，补充在下面问题中，并给出解答. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足__________，__________；又知正项等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$，且 b_1，b_2-1，b_3 成等比数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=a_nb_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【答案】（1）答案见解析；（2）$T_n=5-\frac{5+3n}{2^n}$.

【详解】

（1）选择①②：

当 $n\ge 2$ 时，由 $2S_{n+1}=S_n+1$ 得 $2S_n=S_{n-1}+1$，

两式相减，得 $2a_{n+1}=a_n$，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(n\ge 2)$，

由①得 $2S_2=S_1+1$，即 $2(a_1+a_2)=a_1+1$，

$\therefore a_1=1-2a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，得 $a_1=\frac{1}{2}$．

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，$\therefore \{a_n\}$ 为 $a_1=\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

$\therefore a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$．

选择②③：

当 $n\geq 2$ 时，由③ $S_n=1-2a_{n+1}$，得 $S_{n-1}=1-2a_n$，

两式相减，得 $a_n=2a_n-2a_{n+1}$，$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(n\geq 2)$，

又 $S_1=1-2a_2$，得 $a_1=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，$\therefore \{a_n\}$ 为 $a_1=\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$．

选择①③，由于 $2S_{n+1}=S_n+1$ 和 $S_n=1-2a_{n+1}$ 等价，故不能选择；

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，$d\geqslant 0$，

且 b_1，b_2-1，b_3 成等比数列．

$b_1b_3=(b_2-1)^2$，即 $2(2+2d)=(1+d)^2$，

解得 $d=3$，$d=-1$（舍去），$\therefore b_n=2+(n-1)3=3n-1$．

（2）$c_n=a_nb_n=\dfrac{3n-1}{2^n}$，$T_n=\dfrac{3\times1-1}{2}+\dfrac{3\times2-1}{2^2}+\cdots+\dfrac{3n-1}{2^n}$，

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{3\times1-1}{2^2}+\dfrac{3\times2-1}{2^3}+\cdots+\dfrac{3n-4}{2^n}+\dfrac{3n-1}{2^{n+1}}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{3n-1}{2^{n+1}}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2^n}-\dfrac{3n-1}{2^{n+1}}$，

$\therefore T_n=5-\dfrac{5+3n}{2^n}$.

18.（2020·山东省淄博实验中学高三月考）已知向量$\vec{m}=\left(\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2},1\right)$，$\vec{n}=\left(\cos\dfrac{x}{2},\cos^2\dfrac{x}{2}\right)$，函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-\dfrac{1}{2}$.

（1）若$x\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$，求$f\left(x\right)$的取值范围；

（2）在ABC中，角A，B，C的对边分别是a，b，c，若$f\left(B\right)=1$，$a=5$，$b=5\sqrt{3}$，求ABC的面积.

【答案】（1）$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$；（2）$\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

【详解】

（1）$\because$ 向量$\vec{m}=(\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2},1),\vec{n}=(\cos\dfrac{x}{2},\cos^2\dfrac{x}{2})$，

$\therefore \vec{m}\ \vec{n}=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$.

由此可得函数$f(x)=\vec{m}\ \vec{n}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$，

又$\because$ $x\in(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6})$，得$x+\dfrac{\pi}{6}\in(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3})$.

$\therefore \sin(x+\dfrac{\pi}{6})\in(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，即$f(x)$的取值范围是$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$；

(2)$\because f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$，$\therefore f$（B）$=\sin(B+\frac{\pi}{6})=1$，

又$\because B+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{6})$，$\therefore B+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，可得$B=\frac{\pi}{3}$.

$\because$ $a=5,b=5\sqrt{3}$，

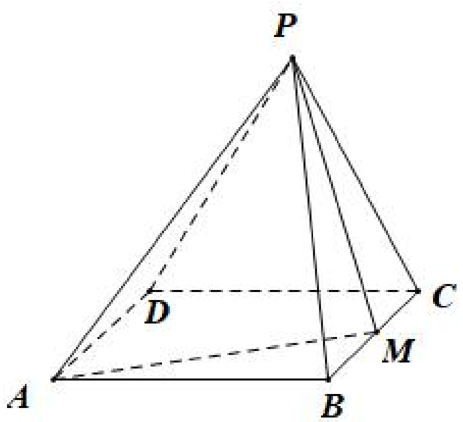
$\therefore$根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{5\times\sin\frac{\pi}{3}}{5\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$，

由$a<b$得$A<B$，所以$A=\frac{\pi}{6}$，

因此$C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{2}$，可得 ABC是以C为直角顶点的直角三角形，

$\therefore$ ABC的面积$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times5\times5\sqrt{3}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$.

19.（2020·山东宁阳县一中高二期中）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，且 PCD是边长为2的等边三角形，四边形$ABCD$是矩形，$BC=2\sqrt{2}$，M为BC的中点.



（1）证明：$AM\perp PM$；

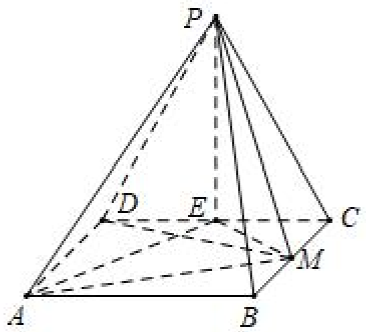
（2）求二面角$P-AM-D$的大小；

（3）求点D到平面APM的距离.

【答案】（1）证明见解析；（2）45°；（3）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

【详解】

（1）取CD的中点E，连接PE、EM、EA.



$\because$ PCD为正三角形，$\therefore PE\perp CD$，

$\because$平面$PCD\perp$平面$ABCD$，$\therefore PE\perp$平面$ABCD$

$\therefore AM\perp PE$

$\because$四边形$ABCD$是矩形

$\therefore \triangle ADE$、ECM、ABM均为直角三角形

由勾股定理可求得：$EM=\sqrt{3}$，$AM=\sqrt{6}$，$AE=3$

$\therefore EM^2+AM^2=AE^2$

$\therefore AM\perp EM$

又$PE\bigcap EM=E$ $\therefore AM\perp$平面PEM

$\therefore AM\perp PM$

（2）由（1）可知$EM\perp AM$，$PM\perp AM$

$\therefore \angle PME$ 是二面角 $P-AM-D$ 的平面角

$\therefore \tan \angle PME=\frac{PE}{EM}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$

$\therefore \angle PME=45°$

$\therefore$ 二面角 $P-AM-D$ 为 $45°$

（3）设 D 点到平面 PAM 的距离为 d，连接 DM，则

$V_{P-ADM}=V_{D-PAM}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{ADM}\cdot PE=\frac{1}{3}S_{PAM}\cdot d$

而 $S_{ADM}=\frac{1}{2}AD\cdot CD=2\sqrt{2}$，

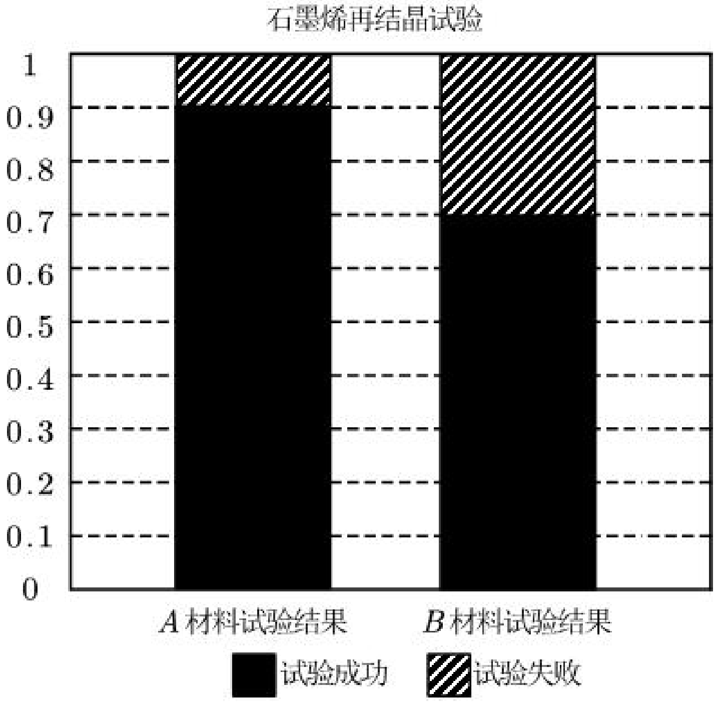
在 Rt PEM 中，由勾股定理可求得 $PM=\sqrt{6}$

$\therefore S_{PAM}=\frac{1}{2}AM\cdot PM=3$，所以：$\frac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\frac{1}{3}\times 3\times d$

$\therefore d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

即点 D 到平面 PAM 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

20.（2020·山东师范大学附中高三学业考试）冬天的北方室外温度极低，若轻薄保暖的石墨烯发热膜能用在衣服上，可爱的医务工作者行动会更方便．石墨烯发热膜的制作：从石墨中分离出石墨烯，制成石墨烯发热膜．从石墨分离石墨烯的一种方法是化学气相沉积法，使石墨升华后附着在材料上再结晶．现有 A 材料、B 材料供选择，研究人员对附着在 A、B 材料上再结晶各做了 50 次试验，得到如下等高条形图．



	A材料	B材料	合计
成功			
不成功			
合计			

（1）由上面等高条形图，填写2×2列联表，判断是否有99%的把握认为试验成功与材料有关？

（2）研究人员得到石墨烯后，再制作石墨烯发热膜有三个环节：①透明基底及*UV*胶层；②石墨烯层；③表面封装层．每个环节生产合格的概率均为$\frac{2}{3}$，且各生产环节相互独立．已知生产1吨的石墨烯发热膜的固定成本为1万元，若生产不合格还需进行修复，且生产1吨石塑烯发热膜的每个环节修复费用均为1000元．如何定价，才能实现每生产1吨石墨烯发热膜获利可达1万元以上的目标？

附：参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$**，其中**$n=a+b+c+d$**．**

$P(K^2\geq k_0)$	**0.100**	**0.050**	**0.010**	**0.005**	**0.001**

k	**2.706**	**3.841**	**6.635**	**7.879**	**10.828**

【答案】（1）列联表见解析；有 99%的把握认为试验成功与材料有关；（2）2.1 万元/吨.

【详解】

（1）根据所给等高条形图，得到2×2的列联表：

	A 材料	B 材料	合计
成功	45	30	75
不成功	5	20	25
合计	50	50	100

K^2的观测值 $K=\dfrac{100\times(45\times20-5\times30)^2}{50\times50\times75\times25}=12$，由于$12>6.635$，

故有 99%的把握认为试验成功与材料有关.

（2）生产 1 吨的石墨烯发热膜，所需的修复费用为 X 万元．易知 X 可得 0，0.1，0.2，0.3．

$P(X=0)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$，$P(X=0.1)=C_3^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{12}{27}$，

$P(X=0.2)=C_3^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$，$P(X=0.3)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{27}$，

则 X的分布列为：（分布列也可以不列）

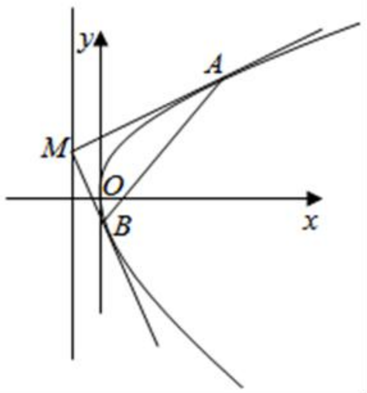
X	0	0.1	0.2	0.3

P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

修复费用的期望：$E\left(X\right)=0\times\frac{8}{27}+0.1\times\frac{12}{27}+0.2\times\frac{6}{27}+0.3\times\frac{1}{27}=0.1$.

所以石墨烯发热膜的定价至少为$0.1+1+1=2.1$万元/吨，才能实现预期的利润目标.

21．（2020·五莲县教学研究室高二期中）已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的右焦点重合，点 M 是抛物线 C 的准线上任意一点，直线 MA，MB 分别与抛物线 C 相切于点 A，B.



（1）求抛物线 C 的标准方程；

（2）设直线 MA，MB 的斜率分别为 k_1，k_2，证明：$k_1\cdot k_2$ 为定值；

（3）求 $|AB|$ 的最小值.

【答案】（1）$y^2=4x$；（2）证明见解析；（3）4.

【详解】

（1）由椭圆方程得，椭圆的右焦点为$(1,0)$

$\therefore$抛物线的焦点为$F(1,0)$，$\therefore p=2$，

所以抛物线的标准方程：$y^2=4x$.

（2）抛物线 C 的准线方程为 $x=-1$．

设 $M(-1,t)$，

设过点 $M(-1,t)$ 的直线方程为 $y=k(x+1)+t$，

与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立，消去 x 得：$ky^2-4y+4k+4t=0$．

其判别式$\triangle=16-16k(k+t)$，令$\triangle=0$，得：$k^2+kt-1=0$．

由韦达定理知 $k_1+k_2=-t$，$k_1k_2=-1$，

故 $k_1k_2=-1$（定值）．

（3）设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，由 $k^2+kt-1=0$，得 $t=\dfrac{1-k^2}{k}$，

故 $ky^2-4y+4k+4t=ky^2-4y+4k+4\times\dfrac{1-k^2}{k}=ky^2-4y+\dfrac{4}{k}=k\left(y-\dfrac{2}{k}\right)^2=0$，

所以 $y=\dfrac{2}{k}$，代入抛物线方程得 $x=\dfrac{1}{k^2}$，

所以 $A(\dfrac{1}{k_1^2}，\dfrac{2}{k_1})$，$B(\dfrac{1}{k_2^2}，\dfrac{2}{k_2})$，

$|AB|=\sqrt{(\dfrac{1}{k_1^2}-\dfrac{1}{k_2^2})^2+(\dfrac{2}{k_2}-\dfrac{2}{k_1})^2}$

$=\sqrt{(\dfrac{k_2^2-k_1^2}{k_2^2k_1^2})^2+4(\dfrac{k_1-k_2}{k_1k_2})^2}$

因为 $k_1k_2=-1$，$k_1+k_2=-t$，

所以 $|AB|=\sqrt{(k_1^2-k_2^2)^2+4(k_1-k_2)^2}=\sqrt{4+t^2}\,|k_1-k_2|$

$=\sqrt{4+t^2}\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}$

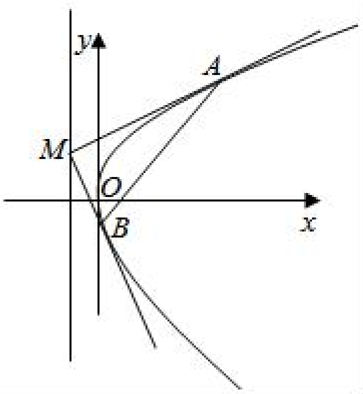
$=\sqrt{4+t^2}\sqrt{t^2+4}$

$=4+t^2\quad 4$，

当且仅当 $t=0$ 时取等号.

当且仅时取等号.

故 $|AB|$ 的最小值为 4.



22．（2020·山东高三期中）设函数 $f\left(x\right)=x^2-\left(a+2\right)x+a\ln x$， $g\left(x\right)=2a\ln x-4x+b$，其中 $a>0$，$b\in R$.

（1）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）若 $a>2$ 且方程 $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$，上有两个不相等的实数根 x_1， x_2，求证 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$.

【答案】（1）答案见解析；（2）证明见解析.

【详解】

（1） $f'\left(x\right)=2x-\left(a+2\right)+\frac{a}{x}\left(x>0\right)=\frac{2x^2-\left(a+2\right)x+a}{x}=\frac{2\left(x-1\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)}{x}$

1°若$\frac{a}{2}<1$，即$0<a<2$时，令$f'(x)>0$，得$0<x<\frac{a}{2}$或$x>1$，

令$f'(x)<0$，得$\frac{a}{2}<x<1$.

$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{2},1\right)$上单调递减

2°若$\frac{a}{2}=1$，即$a=2$时，$f'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x}\quad 0$恒成立

$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

3°若$\frac{a}{2}>1$，即$a>2$时，

令$f'(x)>0$得$0<x<1$或$x>\frac{a}{2}$，令$f'(x)<0$得$\boldsymbol{1<x<\frac{a}{2}}$

$f(x)$在$(0,1)$和$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(1,\frac{a}{2}\right)$上单调递减

综上：$0<a<2$时，$f(x)$在$\left(\frac{a}{2},0\right)$上单调递减，$\left(0,\frac{a}{2}\right)$和$(1,+\infty)$上单调递增

$a=2$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单增

$a>2$时，$f(x)$在$\left(1,\frac{a}{2}\right)$上单减，在$(0,1)$和$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$上单增

（2）方程$f(x)=g(x)$即$x^2-(a-2)x-a\ln x=b$

在$(1,+\infty)$上有两个不等实根x_1和x_2不妨设$1<x_1<x_2$

则$x_1^2-(a-2)x_1-a\ln x_1=b$①

$x_2^2-(a-2)x_2-a\ln x_2=b$ ②

①-②得 $a=\dfrac{x_1^2+2x_1-x_2^2-2x_2}{x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2}$

因为 $a>2$，由（1）知

$f(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{a}{2}\right)$ 上单减，$\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上单增

即 $x\in\left(1,\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$

故若证 $f'\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，只需证 $\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{a}{2}$

即证 $a<x_1+x_2$

只需证 $\dfrac{x_1^2+2x_1-x_2^2-2x_2}{x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2}<x_1+x_2$

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1+\ln x_1<x_2+\ln x_2$

即需证：$x_1^2+2x_1-x_2^2-2x_2>(x_1+x_2)(x_1+\ln x_1-x_2-\ln x_2)$

整理得：$\ln x_1-\ln x_2<\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}$

即证 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{x_2}-1\right)}{\dfrac{x_1}{x_2}+1}$

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，$h(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$

$$h'(t)=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$$

显然 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单增.

所以 $h(t)<h(1)=0$

故 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$ 得证