第一篇　代数

第1章　集合与函数

1.1　集合的概念与运算

1.1.1 ★ 设 x, y, z 都是非零实数,用列举法将代数式 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 的所有可能值组成的集合表示出来.

解析　根据 x、y、z 中负数个数为 3, 2, 1, 0,相应的值为 -3, -1, 1, 5. 所求的集合为 $\{-3, -1, 1, 5\}$.

1.1.2 ★★ 设集合 $S=\left\{y \,\middle|\, y=\sum_{k=1}^{1\,004} x_{2k-1}x_{2k}\text{, 这里 } x_1, x_2, \cdots, x_{2\,008}\in\{\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1\}\right\}$. 问 S 中的不同整数共有多少个?

解析　由条件可知 $x_{2k-1}x_{2k}\in\{(\sqrt{2}-1)^2, (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1), (\sqrt{2}+1)^2\}=\{3-2\sqrt{2}, 1, 3+2\sqrt{2}\}$,设使得 $x_{2k-1}x_{2k}=3-2\sqrt{2}$, 1 和 $3+2\sqrt{2}$ 的下标 k 的个数分别为 a、b、c,则 $y=(3-2\sqrt{2})a+b+(3+2\sqrt{2})c$,且 $a+b+c=1\,004$. 这里 $y\in\mathbf{Z}$ 的充要条件是 $a=c$,转为求满足 $2a+b=1\,004$ 的非负整数解的组数. a 可取 0, 1, …, 502. 所以,S 中的不同整数共有 503 个.

1.1.3 ★★ 一个 4 元实数集合 S 的所有子集的元素和的总和等于 2 008(这里空集的元素和认为是 0). 求 S 的所有元素的和.

解析　设 $S=\{a, b, c, d\}$,则 $(a+b+c+d)\times 2^3=2\,008$(因为 S 中的每个元素恰在 S 的 2^3 个子集中出现),故 $a+b+c+d=251$. 所求的答案为 251.

1.1.4 ★ 已知元素 $(1, 2)\in A\cap B$,这里 $A=\{(x, y)\mid ax-y^2+b=0\}$, $B=\{(x, y)\mid x^2-ay-b=0\}$. 求 a, b 的值.

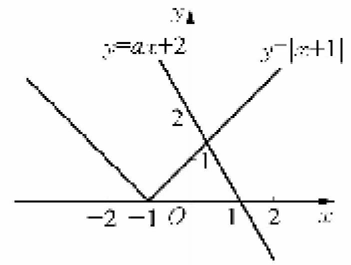
解析　由条件可知 $\begin{cases}a\cdot 1-2^2+b=0,\\ 1^2-a\cdot 2-b=0,\end{cases}$ 解得 $a=-3$, $b=7$.

1.1.5 ★★ 已知集合 $A=\{(x, y)\mid y=ax+2\}$, $B=\{(x, y)\mid y=|x+1|\}$,且 $A\cap B$ 是一个单元集. 求 a 的取值范围.

解析　作出函数 $y=|x+1|$ 的图象,然后讨论直线 $y=ax+2$ 的位置. 利用

图象可知：当 $a \geqslant 1$ 时，$A \cap B$ 是单元集；当 $-1 < a < 1$ 时，$A \cap B$ 是二元集；当 $a \leqslant -1$ 时，$A \cap B$ 也是单元集.

所求 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.



1.1.6 ★★ 已知集合 $A = \left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{y-3}{x-2} = a+1\right\}$，$B = \{(x, y) \mid (a^2-1)x + (a-1)y = 15\}$. 问：实数 a 为何值时，$A \cap B = \varnothing$?

解析 当 $a = 1$ 时，$B = \varnothing$，符合要求. 当 $a \neq 1$ 时，集合 A 表示直线 $y = (a+1)x - 2a + 1\ (x \neq 2)$，而 B 表示直线 $y = -(a+1)x + \dfrac{15}{a-1}$. 由 $A \cap B = \varnothing$，知这两条直线平行，或交于一点 P 使 P 的横坐标为 $x = 2$. 前者要求 $a+1 = -(a+1)$ 且 $-2a+1 \neq \dfrac{15}{a-1}$，后者要求 $2(a+1) - 2a + 1 = -2(a+1) + \dfrac{15}{a-1}$. 分别求解可得 $a = -1$ 或 $a \in \left\{\dfrac{5}{2}, -4\right\}$. 于是，当 $a \in \left\{-1, -4, 1, \dfrac{5}{2}\right\}$ 时，$A \cap B = \varnothing$.

1.1.7 ★★ 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}$，$B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}$，$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. 问：

(1) 当实数 a 为何值时，$(A \cup B) \cap C$ 是一个 2 元集?

(2) 当实数 a 为何值时，$(A \cup B) \cap C$ 是一个 3 元集?

解析 显然 $(0, 1) \in A \cap C$，$(1, 0) \in B \cap C$，所以，$(0, 1)$，$(1, 0) \in (A \cup B) \cap C$.

(1) $a = 0$ 时，直线 $ax + y = 1$ 与 $x + ay = 1$ 均与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切，$(A \cup B) \cap C = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

$a = 1$ 时，直线 $ax + y = 1$ 与 $x + ay = 1$ 重合，即连结 $(0, 1)$，$(1, 0)$ 的直线. $(A \cup B) \cap C = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

$a \neq 0, 1$ 时，直线 $ax + y = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有一个不同于 $(0, 1)$，$(1, 0)$ 的交点，$|(A \cup B) \cap C| \geqslant 3$.

因此 $a = 0, 1$.

(2) 这时 $a \neq 0, 1$，而且直线 $ax + y = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的另一个交点也是直线 $x + ay = 1$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的另一个交点，即这点是 $ax + y = 1$ 与 $x + ay = 1$ 的交点，从而 $x = y = \dfrac{1}{a+1}$，代入 $x^2 + y^2 = 1$ 得 $x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$a = -1 \pm \sqrt{2}$.

1.1.8 ★★ 设集合 A, B, X 满足：$A \cap X = B \cap X = A \cap B$，$A \cup B \cup X = A \cup B$. 证明：$X = A \cap B$.

解析 $A \cap B = A \cap X \subseteq X$. 另一方面，$X \subseteq A \cup B \cup X = A \cup B$，故对 X

中的任意元素 x,都有 $x\in A\cup B$,即 $x\in A$ 或 $x\in B$. 若 $x\in A$,则 $x\in A\cap X=A\cap B$; 若 $x\in B$, 则 $x\in B\cap X=A\cap B$. 所以,总有 $x\in A\cap B$. 从而,$X\subseteq A\cap B$. 综合以上两方面得 $X=A\cap B$.

1.1.9 ★★ 对集合$\{1, 2, \cdots, 15\}$的子集 S,若正整数 n 和 $n+|S|$ 都是 S 的元素,则称 n 为 S 的一个"好数". 如果一个集合 S 有一个元素是"好数",那么称 S 为"好集". 设 7 是某个"好集"X 的一个"好数". 问: 这样的子集 X 有多少个?

解析 $7+|X|\leqslant 15$, 可知 $|X|\in\{2, 3, \cdots, 8\}$. 当 $|X|=2$ 时, $7, 9\in X$,而其余 13 个数都不属于 X,这时有 C_{13}^0 个符合要求的 X;当 $|X|=3$ 时,除 7, 10 以外其余 13 个数中恰有一个属于 X,这时有 C_{13}^1 个符合要求的 X; …; 当 $|X|=8$ 时,除 7, 15 外其余 13 个数中恰有 6 个属于 X,共有 C_{13}^6 个符合要求的 X. 所以,共有 $C_{13}^0+C_{13}^1+\cdots+C_{13}^6=\dfrac{1}{2}(C_{13}^0+\cdots+C_{13}^{13})=2^{12}$ 个符合要求的 X. 本题的答案为 2^{12}.

1.1.10 ★★ 已知(E_1, E_2, E_3, E_4)是$\{1, 2, \cdots, n\}$的有序子集组,满足: $E_1\cap E_2\neq\varnothing$, $E_2\cap E_3\neq\varnothing$, $E_3\cap E_4\neq\varnothing$. 问: 有多少个这样的子集组?

解析 在不考虑条件的情况下,每个 $x\in\{1, 2, \cdots, n\}$都恰有 2^4 种选择,因此,共有 16^n 个集合组(E_1, E_2, E_3, E_4). 其中至少有一个条件不满足(例如 $E_1\cap E_2=\varnothing$)的集合组共有 $12^n\times 3$ 组(这时每个元素都恰有 $3\times 2^2=12$ 种选择),这样的组应扣除. 再考虑其中至少有两个条件不满足的集合组,这时有两种类型,个数(同上分析)分别为 $10^n\times 2$ 和 9^n,应当补上. 最后,应扣除三个条件都不满足的组,个数为 8^n.

综上,满足条件的子集组共有 $16^n-12^n\times 3+(10^n\times 2+9^n)-8^n$ 组.

1.2 映射与函数

1.2.1 ★ 设 $A=\{1, 2, 3, m\}$, $B=\{4, 7, n^4, n^2+3n\}$, 对应法则 $f: a\to b=pa+q$ 是从 A 到 B 的一一映射. 已知 m, n 为正整数,且 1 的像是 4, 7 的原像是 2. 求 p, q, m, n 的值.

解析 由条件可知 $\begin{cases}4=p\cdot 1+q,\\ 7=p\cdot 2+q,\end{cases}$ 解得 $p=3$, $q=1$. 所以, $f(x)=3x+1$. 结合 f 是 A 到 B 的一一映射,可知

$$\begin{cases}n^4=3\cdot 3+1,\\ n^2+3n=3m+1\end{cases} \text{或者} \begin{cases}n^4=3m+1,\\ n^2+3n=3\cdot 3+1,\end{cases}$$

利用 $m, n\in\mathbf{N}_+$,可知只能是后一种情形,解得 $n=2$, $m=5$. 综上所述, $(p, q, m, n)=(3, 1, 5, 2)$.

1.2.2 ★ 设 m, $n\in \mathbf{N}_+$, $m\leqslant n$. 集合 $A=\{a_1, \cdots, a_m\}$, $B=\{b_1, \cdots, b_n\}$.

(1) 求所有 A 到 B 的映射的个数;

(2) 求所有 A 到 B 的单射的个数;

(3) 是否存在 A 到 B 上的满射?

解析 (1) 由于 A 中的每一个元素都有 n 个 B 中的元素可以作为它的像,所以, A 到 B 的映射共有 n^m 个.

(2) 依次确定 A 中元素 a_1, $\cdots$, a_m 的像,方法数分别为 n, $n-1$, $\cdots$, $n-(m-1)$. 所以, A 到 B 的单射共有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)(=\mathrm{A}_n^m)$ 个.

(3) 当 $n=m$ 时,存在 A 到 B 上的满射,满射共有 $n!$ 个. 而当 $n>m$ 时,不存在 A 到 B 上的满射.

1.2.3 ★★ 设 $P=\{n \mid n\geqslant 3, n\in \mathbf{N}_+\}$. 函数 f: $P\to\mathbf{N}_+$ 的定义如下:对 $n\in P$, $f(n)$ 是所有不是 n 的约数的正整数中最小的数. 求函数 f 的值域.

解析 函数 f 的值域 $M=\{q \mid q\in \mathbf{N}_+, q$ 为某个质数的正整数次幂$\}$.

一方面,设 $q\in M$, 即存在 $n\in P$,使得 $1, 2, \cdots, q-1$ 都是 n 的约数,但 $q\nmid n$. 若 q 不是某个质数的正整数次幂,则可将 q 分解为两个互质的正整数 q_1 和 q_2 的积,这里 $2\leqslant q_1<q_2<q$. 这导致 $q_1\mid n$, $q_2\mid n$, 结合 $(q_1, q_2)=1$, 就有 $q_1q_2\mid n$, 即 $q\mid n$, 矛盾. 所以, M 中的数只能是某个质数的正整数次幂的形式.

另一方面,设 $q\in \mathbf{N}_+$, $q=p^\alpha$, 这里 p 为质数, $\alpha\in \mathbf{N}_+$. 并设 p_1, p_2, $\cdots$, p_k 是所有小于 p^α 的质数,取 α_1, $\cdots$, $\alpha_k\in \mathbf{N}_+$,使得 $p_i^{\alpha_i}>p^\alpha$, $1\leqslant i\leqslant k$. 令 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}\cdot p^{\alpha-1}$, 则由 $f(n)$ 的定义可知, $f(n)=p^\alpha$.

综上可知, f 的值域即为 M.

1.2.4 ★ 设 $a(>1)$ 为常数,函数 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$, $x\in \mathbf{R}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 证明: $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(3) 求 $f(x)$ 的值域.

解析 (1) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$,

所以, $f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(x)=1-\dfrac{2}{a^x+1}$. $a>1$ 时,函数 $y=a^x$ 递增, $\dfrac{2}{a^x+1}$ 递减,所以, $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(3) 利用 $a^x>0$, 可知 $a^x+1>1$, 从而 $0<\dfrac{2}{a^x+1}<2$, 故 $-1<1-\dfrac{2}{a^x+1}<1$. 所以, $f(x)$ 的值域为 $(-1, +\infty)$.

1.2.5 ★ 函数 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足：对任意 $x, y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明：$f(x)$为奇函数.

解析 条件式中取 $x=y=0$，得 $f(0)=2f(0)$，$f(0)=0$. 再取 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，$f(-x)=-f(x)$. 所以，$f(x)$为奇函数.

1.2.6 ★ 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数. 证明：$f(x)$可以表示为 $\mathbf{R}$ 上的一个奇函数与一个偶函数之和.

解析 令 $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$，$h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$，则 $g(-x)=g(x)$，$h(-x)=-h(x)$，且 $f(x)=g(x)+h(x)$.

评注 解答中的 $g(x)$与 $h(x)$可以通过解下述方程组得出.

$$\begin{cases} f(x)=g(x)+h(x), \\ f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x). \end{cases}$$

1.2.7 ★ 已知函数 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的图象与它的反函数的图象完全重合. 问：这函数应具有何种形式？这里 a, b, c, d 为常数，并且 a、c 不同时为 0.

解析 由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 可得 $x=\frac{dy-b}{-cy+a}$. 因此，$f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)=\frac{dx-b}{-cx+a}$. 由条件可知 $\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{dx-b}{-cx+a}$，即

$$(cd+ac)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0.$$

上式左边应为一个零多项式，即 $c(a+d)=d^2-a^2=-b(a+d)=0$，这表明 $a+d=0$ 或者 $a=d\ (\neq 0)$ 且 $b=c=0$. 所以，$f(x)=\frac{ax+b}{cx-a}$ 或者 $f(x)=x$.

1.2.8 ★ 是否存在单射 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x^2)-f^2(x)\geqslant\frac{1}{4}$?

解析 若存在满足条件的单射，则令 $x=0$ 和 1，得 $\begin{cases} f(0)-f^2(0)\geqslant\frac{1}{4}, \\ f(1)-f^2(1)\geqslant\frac{1}{4}, \end{cases}$ 于是 $\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$，$\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$. 故 $f(0)=f(1)=\frac{1}{2}$，这与 f 为单射矛盾. 所以，不存在符合要求的单射.

1.2.9 ★ 奇函数 $f(x)$在定义域$(-1, 1)$内是递增的. 已知 $f(1-m)+f(m^2-1)<0$，求实数 m 的取值范围.

解析 由条件知 $f(1-m)<-f(m^2-1)=f(1-m^2)$. 所以，$m$ 应同时满足

条件$\begin{cases}-1<1-m<1,\\-1<1-m^2<1,\\1-m<1-m^2,\end{cases}$解得 $0<m<1$.

1.2.10 ★★ 设函数 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的增函数,且对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=f^{-1}(x)$(这里 $f^{-1}(x)$是函数 $f(x)$的反函数).证明:对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=x$.

解析 设存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_0)\neq x_0$. 如果 $f(x_0)>x_0$,那么由 $f(x)=f^{-1}(x)$ 及 $f(x)$单调递增可知 $x_0=f^{-1}(f(x_0))=f(f(x_0))>f(x_0)$,矛盾;

如果 $f(x_0)<x_0$,同上类似,有 $x_0=f^{-1}(f(x_0))=f(f(x_0))<f(x_0)$,亦矛盾.

所以,对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)=x$.

1.3 二次函数

1.3.1 ★ 设 $f(x)$是一个二次函数,函数 $g(x)$满足:$g(x)=2^xf(x)$,$g(x+1)-g(x)=2^{x+1}\cdot x^2$,$x\in\mathbf{R}$. 求 $g(x)$的表达式.

解析 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a\neq0$). 于是

$$2^{x+1}(a(x+1)^2+b(x+1)+c)-2^x(ax^2+bx+c)=2^{x+1}\cdot x^2,$$

所以,对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $2a(x+1)^2+2b(x+1)+2c-ax^2-bx-c=2x^2$,即

$$ax^2+(4a+b)x+2a+c=2x^2,$$

对比两边 x 各次项的系数可得:$a=2$,$b=-8$,$c=-4$,从而,

$$g(x)=2^{x+1}(x^2-4x-2).$$

1.3.2 ★ 设 a,b 为实常数,已知对任意 $t\in\mathbf{R}$,关于 x 的二次函数 $y=(t^2+t+1)x^2-2(a+t)^2x+t^2+3at+b$ 图象恒过点(1, 0). 求 a, b 的值.

解析 依题意,可得 $(t^2+t+1)-2(a+t)^2+t^2+3at+b=0$,对任意实数 t 恒成立.因此左边是关于 t 的零多项式,所以 $\begin{cases}1-4a+3a=0,\\1-2a^2+b=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$

1.3.3 ★ 函数 $f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$. 问:

(1) k 为何值时,方程 $f(x)=0$ 的两个根分别落在区间(0, 1)和(1, 2)内?

(2) k 为何值时,不等式 $f(x)<0$ 的解集包含区间(0, 2)?

解析 (1) 由于二次函数 $y=f(x)$ 的二次项系数大于零,开口向上,因此,条件等价于$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$即有$\begin{cases}k^2-k-2>0,\\k^2-2k-8<0,\\k^2-3k>0,\end{cases}$解得 $-2<k<-1$ 或者 $3<k<4$.

(2) 利用二次函数的性质,可知条件等价于 $\begin{cases}f(0)\leqslant0,\\f(2)\leqslant0,\end{cases}$ 即有 $\begin{cases}k^2-k-2\leqslant0,\\k^2-3k\leqslant0,\end{cases}$

解得 $0\leqslant k\leqslant 2$.

1.3.4 ★★ 求所有的实数 a,使得对任意实数 x,函数 $f(x)=x^2-2x-|x-1-a|-|x-2|+4$ 的值都是非负实数.

解析 由条件知 $\begin{cases}f(0)=-|1+a|+2\geqslant 0,\\ f(1)=-|a|+2\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant a\leqslant 1$.

下面证明:当 $-2\leqslant a\leqslant 1$ 时,对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\geqslant 0$.

事实上,记 $t=x-1$,则

$$f(x)=t^2-|t-a|-|t-1|+3.$$

记 $g(t)=t^2+3-|t-a|-|t-1|$.

当 $t\leqslant a$ 时, $g(t)=t^2+3-(a-t)-(1-t)=t^2+2t+2-a=(t+1)^2+(1-a)\geqslant 0$;

当 $a\leqslant t\leqslant 1$ 时, $g(t)=t^2+3-(t-a)-(1-t)=t^2+2+a$,结合 $a\geqslant -2$ 知 $g(t)\geqslant 0$;

当 $t\geqslant 1$ 时, $g(t)=t^2+3-(t-a)-(t-1)=t^2-2t+4+a=(t-1)^2+3+a\geqslant 3+a\geqslant 1$.

所以,当 $-2\leqslant a\leqslant 1$,总有 $f(x)\geqslant 0$.

满足条件的 a 构成的集合为 $\{a\mid -2\leqslant a\leqslant 1\}$.

1.3.5 ★★ 设实数 a, b, c, m 满足条件:

(1) a, m 都为正实数;

(2) $\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}=0$.

求证:方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根属于区间 $(0, 1)$.

证明 记 $f(x)=ax^2+bx+c$,则由条件可知

$$\begin{aligned}f\left(\frac{m}{m+1}\right)&=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2+b\left(\frac{m}{m+1}\right)+c=a\left(\frac{m}{m+1}\right)^2-\frac{am}{m+2}\\&=-\frac{am}{(m+1)^2(m+2)}<0.\end{aligned}$$

另一方面,若 $c>0$,则 $f(0)=c>0$;若 $c\leqslant 0$,则 $f(1)=a+b+c=\dfrac{a}{m+2}+(m+1)\left(\dfrac{a}{m+2}+\dfrac{b}{m+1}+\dfrac{c}{m}\right)-\dfrac{c}{m}=\dfrac{a}{m+2}-\dfrac{c}{m}>0$.

所以,总有 $f(0)f\left(\dfrac{m}{m+1}\right)<0$ 或 $f\left(\dfrac{m}{m+1}\right)f(1)<0$. 从而,方程总有一个根属于 $\left(0, \dfrac{m}{m+1}\right)$ 或 $\left(\dfrac{m}{m+1}, 1\right)$,命题成立.

1.3.6 ★★ 设 a, b 为实数,而方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实根. 证明：存在整数 n, 使得

$$|n^2+an+b|\leqslant \max\left\{\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right\}.$$

证明 记 $f(x)=x^2+ax+b=(x-\beta)(x-\gamma)$,这里 $\beta\geqslant\gamma$ 是方程的两个实根. 易知 $\sqrt{a^2-4b}=\beta-\gamma$.

如果 β, γ 中有一个为整数,不妨设 $\beta\in\mathbf{Z}$, 则令 $n=\beta$, 就有 $|f(n)|=0$, 命题显然成立.

如果 β, γ 都不为整数,取 $m\in\mathbf{Z}$, 使得 $m<\beta<m+1$. 分两种情形讨论：

(1) 若 $m<\gamma$, 则

$$\begin{aligned}|f(m)f(m+1)|&=|(m-\beta)(m+1-\beta)(m-\gamma)(m+1-\gamma)|\\&=(\beta-m)(m+1-\beta)(\gamma-m)(m+1-\gamma)\\&\leqslant\left(\frac{(\beta-m)+(m+1-\beta)}{2}\right)^2\left(\frac{(\gamma-m)+(m+1-\gamma)}{2}\right)^2\\&=\left(\frac{1}{4}\right)^2.\end{aligned}$$

所以, $|f(m)|$ 与 $|f(m+1)|$ 中有一个不大于 $\frac{1}{4}$.

(2) 若 $\gamma<m$ 则

$$\begin{aligned}|f(m)f(m+1)|&=(\beta-m)(m+1-\beta)(m-\gamma)(m+1-\gamma)\\&\leqslant\frac{1}{4}((\beta-m)(m+1-\gamma)+(m+1-\beta)(m-\gamma))^2\\&=\frac{1}{4}(\beta-\gamma)^2.\end{aligned}$$

所以, $|f(m)|$ 与 $|f(m+1)|$ 中有一个不大于 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}$.

1.3.7 ★★ 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, $c\in\mathbf{R}$, $a\neq0$) 满足条件：

(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $f(x-4)=f(2-x)$, 且 $f(x)\geqslant x$;

(2) 当 $x\in(0, 2)$时, $f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$, 使得存在 $t\in\mathbf{R}$,只要 $x\in[1, m]$,就有 $f(x+t)\leqslant x$.

解析 因为 $f(x-4)=f(2-x)$, $x\in\mathbf{R}$,可知二次函数 $f(x)$的对称轴为 $x=-1$. 由(3)知 $f(x)$的开口向上,即 $a>0$,于是有 $f(x)=a(x+1)^2(a>0)$.

由(1)得 $f(1)\geqslant 1$，由(2)得 $f(1)\leqslant\left(\frac{1+1}{2}\right)^2=1$，从而 $f(1)=1$，即 $a(1+1)^2=1$. 所以 $a=\frac{1}{4}$，$f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

因为抛物线 $f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 的图象开口向上，而 $y=f(x+t)$ 的图象是由 $y=f(x)$ 的图象平移 t 个单位得到. 要在$[1, m]$上，$y=f(x+t)$ 的图象在 $y=x$ 的图象下方，且 m 最大，则 1 和 m 应当是关于 x 的方程 $\frac{1}{4}(x+t+1)^2=x$ …①的两个根. 将 $x=1$ 代入方程①，得 $t=0$ 或 $t=-4$.

当 $t=0$ 时，代入①，得 $x_1=x_2=1$（这与 $m>1$ 矛盾!）；

当 $t=-4$ 时，代入①，得 $x_1=1$，$x_2=9$，所以 $m=9$.

又当 $t=-4$ 时，对任意 $x\in[1, 9]$，恒有$(x-1)(x-9)\leqslant 0$，于是$\frac{1}{4}(x-4+1)^2\leqslant x$，即 $f(x-4)\leqslant x$.

所以，m 的最大值为 9.

1.3.8 ★★ 设 n 是不小于 3 的正整数，n 个实数 $x_1, \cdots, x_n$ 具有如下性质：对任意一个二次函数 $y=f(x)$，数 $f(x_1), \cdots, f(x_n)$中至少有三个数相同. 证明：$x_1, \cdots, x_n$ 中至少有三个数相同.

解析 取一个二次函数 $f(x)=(x-m)^2$，这里 $m\in\mathbf{R}$，使得 $m<\min\{x_1, \cdots, x_n\}$. 由于函数 $y=f(x)$ 在对称轴的右边单调递增，因此若 $u, v>m$，且 $f(u)=f(v)$，则有 $u=v$. 注意到，$x_1, \cdots, x_n>m$，且 $f(x_1), \cdots, f(x_m)$中有至少三个数相同，从而，$x_1, \cdots, x_n$ 中也至少有三个数相同.

1.3.9 ★★ 已知 a, b, c, d, e 都为实数，且方程 $ax^2+(c-b)x+e-d=0\ (a\neq 0)$有一个大于 1 的实根. 证明：方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 至少有两个实根.

解析 记 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，则

$$\begin{aligned}f(x)&=ax^4+(c-b)x^2+(e-d)+bx^3+bx^2+dx+d\\&=g(x^2)+(bx^2+d)(x+1).\end{aligned}\tag{①}$$

这里 $g(x)=ax^2+(c-b)x+e-d$.

由条件，知存在 $\beta>1$，使得 $g(\beta)=0$，结合①式可知

$$f(-\sqrt{\beta})f(\sqrt{\beta})=(b\beta+d)^2(1-\sqrt{\beta})(1+\sqrt{\beta})=(b\beta+d)^2(1-\beta)\leqslant 0.$$

这表明 $f(-\sqrt{\beta})$与 $f(\sqrt{\beta})$不同为正数也不同为负数. 所以，$f(x)=0$ 有一个根属于$[-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}]$. 设 $f(x)=(x-\gamma)h(x)$，$\gamma\in[-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}]$，则 $h(x)$是一个三次多项式，$h(x)$至少有一个实根.

综上可知，$f(x)=0$ 至少有两个实根，命题获证.

1.3.10 ★★ 实系数二次函数 $f(x)$和 $g(x)$满足：对任意正实数 x，若 $g(x)$为整数，则 $f(x)$也为整数. 证明：存在整数 m，n，使得

$$f(x)=mg(x)+n.$$

证明 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=px^2+qx+r$，这里 a，b，c，p，q，$r\in\mathbf{R}$，且 $a\neq 0$，$p\neq 0$.

不妨设 $p>0$（否则用 $-g(x)$代替 $g(x)$讨论），进一步，还可设 $q=0$，否则作代换 $x\to x-\dfrac{q}{2p}$ 即可转为 $q=0$ 的情形.

现在对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，$k>r$，令 $t=\sqrt{\dfrac{k-r}{p}}$，则 $g(t)=k\in\mathbf{Z}$，从而，有

$$f(t)=\frac{a(k-r)}{p}+bt+c\in\mathbf{Z}.$$

注意到，上式对任意 $k\in\mathbf{N}^*$ $(k>r)$ 成立，故

$$f\left(\sqrt{\frac{k+1-r}{p}}\right)-f\left(\sqrt{\frac{k-r}{p}}\right)\in\mathbf{Z}.$$

于是，对任意 $k\in\mathbf{N}^*$ $(k>r)$，都有

$$\frac{b}{\sqrt{p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k+1-r}+\sqrt{k-r}}+\frac{a}{p}\in\mathbf{Z}. \qquad ①$$

令 $k\to+\infty$，可知 $\dfrac{a}{p}\in\mathbf{Z}$. 进一步，还应有 $b=0$，否则取 k 充分大，使 $\left|\dfrac{b}{\sqrt{p}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{k+1-r}+\sqrt{k-r}}\right|\in(0,1)$，则结论①不成立.

现在令 $m=\dfrac{a}{p}$，$n=c-mr$，就有 $f(x)=mg(x)+n$，这里 $m\in\mathbf{Z}$. 再由 $g(t)$与 $f(t)$都为整数知 $n\in\mathbf{Z}$.

综上可知，存在 m，$n\in\mathbf{Z}$，使得 $f(x)=mg(x)+n$.

1.4 幂函数、指数函数与对数函数

1.4.1 ★ 设 a 是一个不等于1的正实数. 函数 $f(x)$满足：$f(a^x)=x$. 求 $f(1)$和 $f(2)$的值.

解析 在条件式中分别令 $x=0$ 和 $x=\log_a 2$，得 $f(1)=0$，$f(2)=\log_a 2$.

1.4.2 ★ 函数 $f(x)$满足：对任意 x，$y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(xy)=f(x)+f(y) \qquad ①$$

且 $f(2)=1$. 求 $f\left(\frac{1}{64}\right)$的值.

解析 在①中令 $x=y=1$，可知 $f(1)=2f(1)$，$f(1)=0$. 令 $y=\frac{1}{x}$，可知 $f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$，所以，当 $x\neq 0$ 时，有 $f(x)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$. 从而，$f\left(\frac{1}{64}\right)=-f(64)$. 在①中依次令 $(x,y)=(2,2)$，$(2,4)$，$(8,8)$可知 $f(4)=2f(2)=2$，$f(8)=f(4)+f(2)=3$，$f(64)=2f(8)=6$. 所以，$f\left(\frac{1}{64}\right)=-6$.

1.4.3 ★ 已知实数 a，x，y 满足：

$$x\sqrt{a(x-a)}+y\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{|\lg(x-a)-\lg(a-y)|}.$$

求代数式$\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$的值.

解析 由等式中的各式有意义可知$\begin{cases}a(x-a)\geqslant 0, & ①\\ a(y-a)\geqslant 0, & ②\\ x-a>0, & ③\\ a-y>0, & ④\end{cases}$ 由③知 $x>a$，结合①可知 $a\geqslant 0$；由④知 $y<a$，结合②可知 $a\leqslant 0$. 所以，$a=0$，这样，条件式变为 $\sqrt{|\lg x-\lg(-y)|}=0$. 于是，$x=-y$，$\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{3x^2-x^2-x^2}{x^2+x^2+x^2}=\frac{1}{3}$.

1.4.4 ★ 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{a}\right)^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的递减函数. 求实数 a 的取值范围.

解析 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的递减函数，所以，$\frac{\sqrt{a^2+1}-a}{a}>1$. 由于 $\sqrt{a^2+1}-a>|a|-a\geqslant 0$，故 $a>0$. 于是 $\sqrt{a^2+1}-a>a$，即有 $a^2+1>4a^2$，得 $a^2<\frac{1}{3}$. 结合 $a>0$，可知 $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.4.5 ★ 设 $f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}\right)$.

(1) 求所有的实数 m，使得 $f(x)$的定义域为全体实数.

(2) 记满足(1)的实数 m 构成的集合为 M. 证明：对任意 $m\in M$，都有下述性质：对任意 $x\in\mathbf{R}$，函数值 $f(x)\geqslant 1$.

解析 (1) 注意到，$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$ 的充要条件是：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2-4mx+4m^2+m+\dfrac{1}{m-1}>0$. 即$(x-2m)^2+m+\dfrac{1}{m-1}>0$. 这等价于 $m+\dfrac{1}{m-1}>0$. 解这不等式得 $m>1$.

(2) 对任意 $m\in M$，

$$\begin{aligned}x^2-4mx+4m^2+m+\frac{1}{m-1}&=(x-2m)^2+m-1+\frac{1}{m-1}+1\\&\geqslant(m-1)+\frac{1}{(m-1)}+1\geqslant 2+1=3,\end{aligned}$$

所以，$f(x)\geqslant\log_3 3=1$.

1.4.6 ★★ 设 $0<a<1$，函数 $f(t)$满足：对任意 $x>0$，都有 $f(\log_a x)=\dfrac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$，而 $m>n>0$. 试比较 $f\left(\dfrac{1}{m}\right)$与 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$的大小.

解析 记 $t=\log_a x$，则对任意 $t\in\mathbf{R}$，都有

$$f(t)=\frac{a(a^{2t}-1)}{a^t(a^2-1)}=\frac{a}{1-a^2}\left(\frac{1}{a^t}-a^t\right).$$

由于 $0<a<1$，a^t 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以$\dfrac{1}{a^t}$，$-a^t$ 都是增函数，$f(t)$是$(0,+\infty)$上的增函数. $f\left(\dfrac{1}{n}\right)>f\left(\dfrac{1}{m}\right)$.

1.4.7 ★★ 求和数

$$S=[\lg 2]+[\lg 3]+\cdots+[\lg 2\,008]+\left[\lg\frac{1}{2}\right]+\left[\lg\frac{1}{3}\right]+\cdots+\left[\lg\frac{1}{2\,008}\right]$$

的值. 这里$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

解析 注意到，对任意实数 x，有

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Z},\\ -1, & x\notin\mathbf{Z}.\end{cases}$$

而对 $m\in\{2,3,\cdots,2\,008\}$仅有 $m=10,100,1\,000$ 时，$\lg m\in\mathbf{Z}$，所以，

$$S=\sum_{m=2}^{2\,008}\left([\lg m]+\left[\lg\frac{1}{m}\right]\right)=\sum_{m=2}^{2\,008}([\lg m]+[-\lg m])=-2\,004.$$

因此，所求和数的值为$-2\,004$.

1.4.8 ★★ 求所有的实数 x，y，使得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4^x}+\dfrac{1}{27^y}=\dfrac{5}{6}, & ①\\ \log_{27}y-\log_4 x\geqslant\dfrac{1}{6}, & ②\\ 27^y-4^x\leqslant 1. & ③\end{cases}$$

解析 由②知 x, y 都是正实数. 为方便起见,记 $27^y=a$, $4^x=b$. 由③知 $a\leqslant b+1$,结合①式可知 $\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{6}$, 于是, $5b(b+1)\geqslant 6(2b+1)$, 解得 $b\geqslant 2$ 或 $b\leqslant-\dfrac{3}{5}$, 但 $b=4^x>0$, 所以, $b\geqslant 2$, 从而, $x\geqslant\dfrac{1}{2}$. 现在由②可知 $\log_{27}y\geqslant\dfrac{1}{6}+\log_4 x\geqslant\dfrac{1}{6}+\log_4\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}$. 所以, $y\geqslant 27^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3}$.

回到①式,得 $\dfrac{5}{6}=4^{-x}+27^{-y}\leqslant 4^{-\frac{1}{2}}+27^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$.

所以,不等式取等号,这要求 $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$. 满足条件的实数对为 $(x, y)=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$.

1.4.9 ★★ 设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,满足:对任意 $x, y\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 且 $f(1)=2$. 问:实数 k 为何值时,存在 $t>2$, 使得

$$f(k\log_2 t)+f((\log_2 t)^2-\log_2 t-2)<0?$$

解析 令 $x=y=0$, 可得 $f(0)=2f(0)$, $f(0)=0$. 结合 $f(1)=2$ 及 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,可知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数. 进而 $f(x)<0$ 的充要条件是 $x<0$. 问题转为求 k,使存在 $t>2$ 满足 $k\log_2 t+(\log_2 t)^2-\log_2 t-2<0$. 令 $\log_2 t=x$, $t>2$ 即 $x>1$. 利用二次函数 $x^2+(k-1)x-2$ 的性质可知 $\begin{cases}\Delta=(k-1)^2+8>0,\\ 1<\dfrac{1}{2}\left(-(k-1)+\sqrt{(k-1)^2+8}\right),\end{cases}$ 解得 $k<2$.

1.4.10 ★★ 设 x, y 为正实数,并且满足:

$$x\cdot y^{1+\lg x}=1.$$

求 xy 的取值范围.

解析 取对数,可得 $\lg x+(1+\lg x)\lg y=0$. 记 $u=\lg x+\lg y$,则

$$0=u+\lg x\lg y\leqslant u+\left(\frac{\lg x+\lg y}{2}\right)^2=u+\frac{u^2}{4}.$$

所以, $u\leqslant-4$ 或 $u\geqslant 0$. 于是, $0<xy\leqslant 10^{-4}$ 或 $xy\geqslant 1$.

因此，xy 的取值范围是$(0, 10^{-4}]\cup[1, +\infty)$.

1.4.11 ★★ 已知关于 x 的方程

$$\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[4]{x+80}+c$$

有实数解. 求实数 c 的取值范围.

解析 问题等价于：求函数 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[4]{x+80}$ 的值域.

$f(x)$的定义域为$[0, +\infty)$，在此区间上函数 $y=\sqrt[3]{x+7}$ 是递增函数. 下面考察函数 $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt[4]{x+80}\ (x\geqslant 0)$.

注意到，当 $x>0$ 时，有 $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4\cdot\sqrt[4]{(x+80)^3}}$.

而 $x>0$ 时，有 $2\sqrt{x}<4\sqrt[4]{x^2}<4\cdot\sqrt[4]{(x+80)^3}$. 所以，当 $x>0$ 时，有 $g'(x)>0$. 这表明：当 $x\in[0, +\infty)$时，$g(x)$也是递增函数. 从而，$f(x)$在$[0, +\infty)$上递增. 所以，当且仅当 $c\in[f(0), +\infty)$时，方程有实数解. 因此，c 的取值范围是：

$$c\geqslant\sqrt[3]{7}-\sqrt[4]{80}=\sqrt[3]{7}-2\sqrt[4]{5}.$$

1.4.12 ★★ 求解下列不等式

$$|\log_2 x-3|+|2^x-8|\geqslant 9. \qquad ①$$

解析 由条件知 $x>0$，分三种情形讨论.

(1) 当 $x\in(0, 3]$时，不等式①变为 $3-\log_2 x+8-2^x\geqslant 9$，即 $2^x+\log_2 x\leqslant 2$. 由于 $f(x)=2^x+\log_2 x$ 在$(0, 3]$上递增，结合 $f(1)=2$，可知 $0<x\leqslant 1$.

(2) 当 $x\in(3, 8]$时，不等式①变为 $3-\log_2 x+2^x-8\geqslant 9$，即 $2^x-\log_2 x\geqslant 14$. 记 $g(x)=2^x-\log_2 x$，则 $g'(x)=2^x\cdot\ln 2-\dfrac{1}{x\ln 2}$，当 $x\geqslant 3$时，$2^x\cdot\ln 2\geqslant 8\ln 2$，而$\dfrac{1}{x\ln 2}\leqslant\dfrac{1}{3\ln 2}$，又 $8\ln 2-\dfrac{1}{3\ln 2}=\ln 2^8-\dfrac{1}{\ln 8}>0$，所以，$g(x)$在 $x\geqslant 3$ 时单调递增，又 $g(4)=2^4-\log_2 4=14$，故此时不等式的解集为$[4, 8]$.

(3) 当 $x>8$ 时，不等式①变为 $\log_2 x-3+2^x-8\geqslant 9$，即 $2^x+\log_2 x\geqslant 20$. 而 $x>8$ 时，$2^x+\log_2 x>2^8+\log_2 8=259>20$，故 $x>8$ 满足不等式①.

所求不等式的解集为$(0, 1]\cup[4, +\infty)$.

1.5 函数的最大值与最小值

1.5.1 ★ 设 a 为实数，记 $m(a)$为函数 $f(x)=x^2-ax+\dfrac{a}{2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 的最小值. 求 a 变化时，$m(a)$的最大值.

解析　由二次函数的性质,可知

$$m(a)=\begin{cases} f(0), & \text{当}\dfrac{a}{2}<0\text{时};\\ f\left(\dfrac{a}{2}\right), & \text{当}\ 0\leqslant\dfrac{a}{2}\leqslant 1\text{时};\\ f(1), & \text{当}\dfrac{a}{2}>1\text{时}.\end{cases}$$

于是

$$m(a)=\begin{cases} \dfrac{a}{2}, & \text{当}\ a<0\text{时};\\ \dfrac{a(2-a)}{4}, & \text{当}\ 0\leqslant a\leqslant 2\text{时};\\ 1-\dfrac{a}{2}, & \text{当}\ a>2\text{时}.\end{cases}$$

$m(a)$的最大值为$\dfrac{1}{4}$(当$a=1$时取到).

1.5.2 ★ 设实数a, x, y满足下述条件

$$\begin{cases} x+y=2a-1, & ①\\ x^2+y^2=a^2+2a-3. & ②\end{cases}$$

求实数xy所能取到的最小值.

解析　由 $①^2-②$ 可得

$$xy=\frac{1}{2}\left((2a-1)^2-(a^2+2a-3)\right)=\frac{1}{2}(3a^2-6a+4).$$

结合$x^2+y^2\geqslant 2xy$,可知$a^2+2a-3\geqslant 3a^2-6a+4$,解得$2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant 2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$xy=\dfrac{3}{2}(a-1)^2+\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{3}{2}\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\dfrac{1}{2}$,故$xy$的最小值在$a=2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取到,所求的最小值为$\dfrac{11-6\sqrt{2}}{4}$.

1.5.3 ★ 设函数$f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+7x+14}$, $g(x)=\dfrac{x^2-5x+10}{x^2+5x+20}$.

(1) 求函数$f(x)$的最大值;

(2) 求函数$g(x)^{f(x)}$的最大值.

解析　(1) 由于对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$x^2+7x+14>0$(判别式$\Delta=7^2-4\times 14<0$),故$f(x)$的定义域为全体实数.记$y=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+7x+14}$,即有

$$(y-1)x^2+(7y-4)x+14y-3=0.$$

当 $y\neq 1$ 时，应有 $\Delta=(7y-4)^2-4(y-1)(14y-3)\geqslant 0$，解得 $-\dfrac{7}{2}\leqslant y\leqslant 2$. 又当 $x=-5$ 时，$y=2$. 所以，$f(x)$的最大值为 2.

(2) 利用(1)的方法，可知 $g(x)$的最大值为 3，且当 $x=-5$ 时，$g(x)$取得最大值. 注意到，对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2-5x+10>0$，$x^2+5x+20>0$. 故对任意$x\in\mathbf{R}$，数 $g(x)^{f(x)}$ 有定义. 当 $x\leqslant -1$ 时，$g(x)\geqslant 1$，故 $g(x)^{f(x)}\leqslant g^2(x)\leqslant 3^2$；当 $x>-1$时，$g(x)<1$，$f(x)>0$，这时，$g(x)^{f(x)}\leqslant g^0(x)=1$.

$g(x)^{f(x)}$ 在 $x=-5$ 时取到最大值 9.

1.5.4 ★★ 对任意不全为零的实数 x，y，设 $f(x,y)=\min\left(x,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. 证明：存在 x_0，$y_0\in\mathbf{R}$，使得对任意 x，$y\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$. 并求 $f(x_0,y_0)$的最小值.

解析 $f(1,0)=1$. 若$x\leqslant 1$，则 $f(x,y)\leqslant x\leqslant 1$；若 $x>1$，则 $f(x,y)\leqslant \dfrac{x}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}<1$. 所以，$(x_0,y_0)=(1,0)$，并且 $f(x_0,y_0)$的最小值为 1.

1.5.5 ★★ 函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)$，对应法则为

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\\ \dfrac{p+1}{q}, & \text{若 } x=\dfrac{p}{q},\ p,q\in\mathbf{N}^*,\ (p,q)=1,\ p<q.\end{cases}$$

求 $f(x)$在区间$\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$上的最大值.

解析 当 $x\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$且 x 为无理数时，$f(x)<\dfrac{8}{9}$. 设 $x=\dfrac{p}{q}\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$，则由$\dfrac{7}{8}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{8}{9}$，可知 $8q-9p\geqslant 1$，$8p-7q\geqslant 1$，相加得 $q-p\geqslant 2$，$(8q-9p)+8(q-p)\geqslant 1+8\times 2$，即 $16q-17p\geqslant 17$. $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{p+1}{q}\leqslant\dfrac{16}{17}$，且当$\dfrac{p}{q}=\dfrac{15}{17}\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$时，$f\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{16}{17}>\dfrac{8}{9}$. 故所求最大值为$\dfrac{16}{17}$.

1.5.6 ★★ (1) 证明：对任意 $x\in[-1,1]$，均有 $|4x^3-3x|\leqslant 1$；

(2) 设 a，b，c 为实数，M 是函数 $y=|4x^3+ax^2+bx+c|$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最大值. 证明：$M\geqslant 1$，并求等号成立时，a，b，c 的值.

解析 (1) 当 $x\in[-1,1]$时，

$$4x^3-3x-1=(x-1)(2x+1)^2\leqslant 0;$$

$$-1-(4x^3-3x)=-(x+1)(2x-1)^2\leqslant 0.$$

于是，$-1\leqslant 4x^3-3x\leqslant 1$，即$|4x^3-3x|\leqslant 1$,并且等号当且仅当 $x=-1$，$-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}$，1 时取到.

(2) 记 $f(x)=4x^3+ax^2+bx+c$. 设对任意 $x\in[-1,1]$均有 $|f(x)|<1$.

令 $g(x)=f(x)-(4x^3-3x)=ax^2+(b+3)x+c$，则由(1)可知 $g(-1)>0$，$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)<0$，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，$g(1)<0$. 这表明方程 $ax^2+(b+3)x+c=0$ 至少有三个不同的实根，从而，$a=b+3=c=0$，即 $f(x)=4x^3-3x$. 但这时，$|f(1)|=1$，矛盾.

所以，$M\geqslant 1$. 进一步，由前面的讨论，可知 $M=1$ 时，$a=0$，$b=-3$，$c=0$.

1.5.7 ★★ 设 x_1，…，x_n 都是区间$\left(\dfrac{1}{4}, 1\right)$内的实数. 求和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\dfrac{1}{4}\right)$ 的最小值，这里 $x_{n+1}=x_1$.

解析 由于对任意实数 x，都有 $x-\dfrac{1}{4}\leqslant x^2$ $\left(即\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0\right)$，结合$\dfrac{1}{4}<x_k<1$，以及对数函数的性质可知 $\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\dfrac{1}{4}\right)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}^2=2\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}\geqslant 2n\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\log_{x_k}x_{k+1}}=2n$.（最后一式用到性质 $\log_x y\ \log_y z=\log_x z$.）又当 $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{2}$ 时，有$\sum\limits_{k=1}^{n}\log_{x_k}\left(x_{k+1}-\dfrac{1}{4}\right)=2n$. 所以，所求的最小值为 $2n$.

1.5.8 ★★ 设 m，n 是两个不同的正整数，实数 $x\in(0,1)$. 求代数式 $|x^m-x^n|$ 的最大值.

解析 不妨设 $m>n$，记 $f(x)=|x^m-x^n|=x^n-x^m$，则

$$f'(x)=nx^{n-1}-mx^{m-1}$$

在 $x<x_0=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$ 时为正，在 $x>x_0$ 时为负.

所以，当 $x=\left(\dfrac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$ 时 $f(x)$取到最大值. 类似讨论 $m<n$ 的情况，可得 $|x^m-x^n|$的最大值为$|m-n|\left(\dfrac{n^n}{m^m}\right)^{\frac{1}{m-n}}$.

1.5.9 ★★ 正实数 x, y, z 满足：$x^4+y^4+z^4=1$. 求代数式$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$ 的最小值.

解析 由条件知 $x, y, z\in(0, 1)$，利用上题的结论知 $x(1-x^8)$ 的最大值为 $8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{9}{8}}$，所以，$\frac{x^3}{1-x^8}=\frac{x^4}{x(1-x^8)}\geqslant\frac{9^{\frac{9}{8}}}{8}x^4$，同理可得 $\frac{y^3}{1-y^8}\geqslant\frac{9^{\frac{9}{8}}}{8}y^4$，$\frac{z^3}{1-z^8}\geqslant\frac{9^{\frac{9}{8}}}{8}z^4$. 三式相加，利用 $x^4+y^4+z^4=1$，可知

$$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}\geqslant\frac{9^{\frac{9}{8}}}{8}=\frac{9}{8}\cdot\sqrt[4]{3},$$

等号当 $x=y=z=\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$ 时取到. 所以，要求的最小值为$\frac{9\cdot\sqrt[4]{3}}{8}$.

1.5.10 ★★ 设 $x, y, z, w\in[0, 1]$. 求 $S=x^2y+y^2z+z^2w+w^2x-xy^2-yz^2-zw^2-wx^2$ 的最大值.

解析 不妨设 $x=\max\{x, y, z, w\}$，则

$$\begin{aligned}S&=y(x^2-z^2+yz-xy)+w(z^2-x^2+xw-zw)\\&=y(x-z)(x+z-y)+w(z-x)(z+x-w)\\&\leqslant y(x-z)(x+z-y)\leqslant\left(\frac{1}{3}(y+x-z+x+z-y)\right)^3\\&=\frac{8}{27}x^3\leqslant\frac{8}{27}.\end{aligned}$$

又当 $x=1$，$y=\frac{2}{3}$，$z=\frac{1}{3}$，$w=0$ 时，有 $S=\frac{8}{27}$. 所以，S 的最大值为$\frac{8}{27}$.

1.5.11 ★★ 正实数 x, y, z 满足：$xyz=1$. 求代数式

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+y)(1+z)} \qquad ①$$

的最小值.

解析 当 $x=y=z=1$ 时，式①的值为$\frac{3}{4}$. 注意到

$$\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}+\frac{1+x}{8}+\frac{1+y}{8}\geqslant3\sqrt[3]{\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}\cdot\frac{1+x}{8}\cdot\frac{1+y}{8}}=\frac{3}{4}x,$$

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{1+z}{8}+\frac{1+x}{8}\geqslant\frac{3}{4}y,\ \frac{z^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geqslant\frac{3}{4}z.$$

上述三式求和,可知 ① 式$\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z)-\frac{3}{4}$

$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt[3]{xyz}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

所以,所求最小值为$\frac{3}{4}$.

评注 这里采用的配平均的方法,在均值不等式的应用中非常常见.

1.5.12 ★★ 实数 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 满足条件

$$\begin{cases}x_1^2+\cdots+x_6^2=6, & ①\\ x_1+\cdots+x_6=0. & ②\end{cases}$$

求 $x_1x_2\cdots x_6$ 的最大可能值.

解析 设 $x_1, \cdots, x_6$ 中负数的个数为 a. 由①,②可知 $a\notin\{0, 6\}$. 如果 a 为奇数,那么 $x_1\cdots x_6\leqslant 0$; 如果 a 为偶数,$a\in\{2, 4\}$. 只需讨论 $a=4$ 的情况(否则用$-x_i$ 代替 x_i 讨论). 不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant 0$, $0>x_3\geqslant\cdots\geqslant x_6$. 此时由 ② 知 $x_1+x_2=-(x_3+\cdots+x_6)$, 记 $k=x_1+x_2$, 由 Cauchy 不等式可知

$$(x_1+x_2)^2\leqslant 2(x_1^2+x_2^2),\ \frac{1}{2}(x_3+\cdots+x_6)^2\leqslant 2(x_3^2+\cdots+x_6^2).$$

两式相加得 $\frac{3}{2}k^2\leqslant 2(x_1^2+\cdots+x_6^2)=12$, 故 $k\leqslant 2\sqrt{2}$. 利用上述结论,结合均值不等式可知

$$x_1x_2\cdots x_6\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{-x_3-\cdots-x_6}{4}\right)^4=\frac{k^6}{4\cdot 4^4}\leqslant\frac{(2\sqrt{2})^6}{4^5}=\frac{1}{2}.$$

等号在 $x_1=x_2=\sqrt{2}$, $x_3=\cdots=x_6=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时可以取到.

所以,$x_1x_2\cdots x_6$ 的最大值为$\frac{1}{2}$.

1.5.13 ★★ 求最大的实数 k,使得对任意正实数 a, b, c,都有

$$\frac{(b-c)^2(b+c)}{a}+\frac{(c-a)^2(c+a)}{b}+\frac{(a-b)^2(a+b)}{c}$$
$$\geqslant k(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad ①$$

解析 在①中令 $a=b=1$,得 $2(1-c)^2(1+c)\geqslant k(1-c^2)$, 令 $c\to 0^+$, 可得 $k\leqslant 2$. 下面证明 $k=2$ 时, 不等式①成立,即证

$$\sum \frac{(b-c)^2(b+c)}{a} \geqslant 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\sum (b-c)^2. \qquad ②$$

由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$, 注意到,

$$② \Leftrightarrow \sum \frac{(b-c)^2(b+c-a)}{a} \geqslant 0. \qquad ③$$

若 $b+c-a \geqslant 0$, 则③式左边的每一项都不小于零,不等式显然成立.若 $b+c-a <$ 0, 则 $\frac{(b-c)^2(b+c-a)}{a}+\frac{(a-c)^2(a+c-b)}{b} \geqslant \frac{(b-c)^2(b+c-a)}{a}+\frac{(b-c)^2(a+c-b)}{a}=\frac{2c(b-c)^2}{a} \geqslant 0$, 而 $\frac{(a-b)^2(a+b-c)}{c} \geqslant 0$. 所以,不等式③仍然成立.

综上可知,所求的最大实数 $k=2$.

1.6 函数迭代与函数方程

1.6.1 ★ 设函数 f: $D \to D$, 对任意 $x \in D$, 记 $f^{(0)}(x)=x$, $f^{(n+1)}(x)=f(f^{(n)}(x))$, $n=0, 1, 2, \cdots$. 称由此定义的函数 $f^{(n)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次迭代.

分别就下面给出的 $f(x)$ 求 n 次迭代 $f^{(n)}(x)$.

(1) $f(x)=x+c$, 这里 c 为常数;

(2) $f(x)=ax+b$, 这里 a, b 为常数,且 $a \neq 1$;

(3) $f(x)=\frac{x}{1+ax}$, 这里 a 为常数;

(4) $f(x)=x^m$, 这里 m 为给定的正整数.

解析 (1) $f^{(n)}(x)=x+nc$.

(2) $f^{(n)}(x)=a^n x+(1+a+\cdots+a^{n-1})b=a^n x+\frac{1-a^n}{1-a}b$.

(3) $f^{(n)}(x)=\frac{x}{1+nax}$.

(4) $f^{(n)}(x)=x^{m^n}$.

1.6.2 ★ 设 $f(x)=\sqrt{ax^2+b}$, 这里 a, b 为正实数,且 $a \neq 1$. 求 $f(x)$ 的 n 次迭代 $f^{(n)}(x)$.

解析 方程 $\sqrt{ax^2+b}=x$ 的解为 $x^2=\frac{b}{1-a}$. $f(x)=\sqrt{a\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}}$, $f^2(x)-\frac{b}{1-a}=a\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)$.

于是

$$f^{(2)}(x)=\sqrt{a\left(f(x)^2-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}}=\sqrt{a^2\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}},$$

依此递推,可得 $f^{(n)}(x)=\sqrt{a^n\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)+\frac{b}{1-a}}$.

评注 此题采用的方法称为“不动点法”,它在处理函数迭代问题时经常用到.请读者对比递推数列中的不动点法.

1.6.3 ★★ 若存在一个函数 $\varphi(x)$ 以及它的反函数 $\varphi^{-1}(x)$,使得 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$,

我们就称 $f(x)$ 通过 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 相似,简称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相似,其中 $\varphi(x)$ 称为桥函数.

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相似,即 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$,则

$$\begin{aligned}f^{(2)}(x)&=f(f(x))=\varphi^{-1}(g(\varphi(f(x))))\\&=\varphi^{-1}(g(\varphi(\varphi^{-1}(g(\varphi(x))))))=\varphi^{-1}(g^{(2)}(\varphi(x))).\end{aligned}$$

用数学归纳法可以证明:$f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))$. 这样一来,便把 f 的 n 次迭代问题化为 g 的 n 次迭代问题.

利用这方法求下述函数的 n 次迭代.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[k]{1+ax^k}}$,这里 k 为给定的正整数;

(3) $f(x)=2x^2-1$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

(4) $f(x)=4x(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

解析 (1) 先将 $f(x)$ 变形为 $f(x)=\dfrac{1}{\left[1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\right]}$. 取 $\varphi(x)=1-\dfrac{1}{x}$,

$g(x)=x^2$, 则 $\varphi^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $g^{(n)}(x)=x^{2^n}$. 而

$$f(x)=\frac{1}{\left[1-\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\right]}=\varphi^{-1}\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\right)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x))),$$

所以, $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))=\varphi^{-1}\left(\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2^n}\right)=\dfrac{x^{2^n}}{x^{2^n}-(x-1)^{2^n}}$.

(2) 令 $\varphi(x)=x^k$，$g(x)=\dfrac{x}{1+ax}$，则 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$，于是结合 $g^{(n)}(x)=\dfrac{x}{1+anx}$，可得 $f^{(n)}(x)=\dfrac{x}{\sqrt[k]{1+anx^k}}$.

(3) 令 $\varphi(x)=\arccos x$，$g(x)=2x$，则 $\varphi^{-1}(x)=\cos x$，此时

$f(x)=2x^2-1=2\cos^2(\arccos x)-1=\cos 2(\arccos x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$.

而 $g^{(n)}(x)=2^n x$，所以 $f^{(n)}(x)=\varphi^{-1}(g^{(n)}(\varphi(x)))=\cos(2^n\arccos x)$.

这个迭代结果，就是著名的切比雪夫多项式.

(4) 与上类似，令 $\varphi(x)=\arcsin\sqrt{x}$，$g(x)=2x$，则 $\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))=\varphi^{-1}(2\arcsin\sqrt{x})=\sin^2(2\arcsin\sqrt{x})=4\sin^2(\arcsin\sqrt{x})\cdot\cos^2(\arcsin\sqrt{x})=4x(1-x)=f(x)$. 从而结合 $g^{(n)}(x)=2^n x$，可知 $f^{(n)}(x)=(\sin(2^n\arcsin\sqrt{x}))^2$.

1.6.4 ★★ 试求一个函数 $p(x)$，使得 $p^{(8)}(x)=x^2+2x$.

解析 令 $f(x)=x^2+2x$，$\varphi(x)=x+1$，$g(x)=x^2$，则 $\varphi^{-1}(x)=x-1$. 于是 $f(x)=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))$. 令 $h(x)=x^{\sqrt[8]{2}}$，则 $h^{(8)}(x)=x^2=g(x)$. 于是取

$$p(x)=\varphi^{-1}(h(\varphi(x)))=(x+1)^{\sqrt[8]{2}}-1,$$

则 $p^{(8)}(x)=\varphi^{-1}(h^{(8)}(\varphi(x)))=\varphi^{-1}(g(\varphi(x)))=f(x)=x^2+2x$.

故 $p(x)=(x+1)^{\sqrt[8]{2}}-1$ 即为一个满足条件的函数.

1.6.5 ★★ 求所有的函数 f：$\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，使得对任意 x，$y\in\mathbf{N}^*$，都有

$$f(x+f(y))=f(x)+y. \qquad ①$$

解析 令 $f(1)=a$，则由①式可知 $f(1+f(1))=f(1)+1$，即 $f(1+a)=1+a$，进而 $f(1+f(1+a))=f(1)+1+a$，即 $f(2+a)=2a+1$. 另一方面，$f(2+a)=f(2+f(1))=f(2)+1$. 所以，$f(2)=2a$. 进而，有

$$f(1+2a)=f(1+f(2))=f(1)+2=a+2,$$

又因为 $$f(1+2a)=f(a+f(1+a))=f(a)+1+a,$$

对比上述两式，可得 $f(a)=1$. 从而，有 $f(2a)=f(a+f(1))=f(a)+1=2$，

于是 $$2=f(1+2a-1)=f(2a-1+f(a))=a+f(2a-1).$$

结合 $f(2a-1)\in\mathbf{N}^*$，可知只能是 $a=1$，即 $f(1)=1$. 这样，由①式可知，对任意 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x+1)=f(x)+1$.

利用 $f(1)=1$ 及数学归纳法易证：对任意 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)=x$. 又 $f(x)=x$ 显然满足①，从而，所求函数 f：$\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 为 $f(x)=x$.

1.6.6 ★☆★ 求所有的函数 f：$\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，使得对任意 m，$n\in\mathbf{N}^*$，都有

$$f^2(m)+f(n)\mid (m^2+n)^2 \tag{①}$$

解析　一个显然满足条件的函数是 $f(n)=n$. 下面证明这是唯一符合要求的函数.

设 $f(1)=t$, 令 $m=n=1$, 知 $t^2+t\mid 4$, $t^2+t=2$ 或 4, 后者无解,前者得 $f(1)=1$.

在①中令 $m=1$, 可知对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $f(n)+1\mid (n+1)^2$. 令 $n=1$, 知对任意 $m\in\mathbf{N}^*$, 有 $f^2(m)+1\mid (m^2+1)^2$.

对任意质数 p, $f(p-1)+1\mid p^2\Rightarrow f(p-1)+1=p$ 或 p^2. 如果 $f(p-1)+1=p^2$, 那么 $(p^2-1)^2+1\mid ((p-1)^2+1)^2$, 但 $((p-1)^2+1)^2\leqslant ((p-1)^2+(p-1))^2=(p-1)^2p^2$, 而 $(p^2-1)^2+1=p^4-2p^2+2=p^2(p^2-2)+2>p^2(p-1)^2$. 矛盾. 所以, $f(p-1)+1=p$, 即 $f(p-1)=p-1$.

于是存在无穷多个 $k\in\mathbf{N}^*$, 使 $f(k)=k$. 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 有 $f(k)^2+f(n)\mid (k^2+n)^2$, 即 $k^2+f(n)\mid (k^2+n)^2$, 而

$$(k^2+n)^2=(k^2+f(n)+n-f(n))^2=A(k^2+f(n))+(n-f(n))^2.$$

其中 A 为某个整数,这表明 $k^2+f(n)\mid (n-f(n))^2$. 对固定的 n, 由于 $(n-f(n))^2$ 是无穷多个正整数的倍数,故 $(n-f(n))^2=0$, 即 $f(n)=n$.

1.6.7 ★★ 记 $Q_1=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant 1\}$. 设函数 f: $Q_1\to R$ 对任意 x, $y\in Q_1$ 满足不等式:

$$|f(x+y)-f(x)-f(y)|<\varepsilon, \tag{①}$$

这里 ε 是某个大于零的实数. 证明: 存在 $q\in\mathbf{R}$, 使得对任意 $x\in Q_1$, 都有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-q\right|<2\varepsilon$.

解析　设 f 是满足上述条件的函数,首先证明对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 及 $x\geqslant 1$, 都有

$$nf(x)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(nx)\leqslant nf(x)+(n-1)\varepsilon. \tag{②}$$

当 $n=1$ 时,②显然成立. 设②对 n 成立. 在①中取 $y=nx$ 得

$$f(x)+f(nx)-\varepsilon<f((n+1)x)<f(x)+f(nx)+\varepsilon.$$

利用归纳假设,知 $f(x)+f(nx)-\varepsilon\geqslant f(x)+nf(x)-(n-1)\varepsilon-\varepsilon=(n+1)f(x)-n\varepsilon$, $f(x)+f(nx)+\varepsilon\leqslant f(x)+nf(x)+(n-1)\varepsilon+\varepsilon=(n+1)f(x)+n\varepsilon$, 从而②对 $n+1$ 成立.

在②中,令 $x=1$, 得

$$nf(1)-(n-1)\varepsilon\leqslant f(n)\leqslant nf(1)+(n-1)\varepsilon. \tag{③}$$

在②中令 $x=\dfrac{m}{n}$, $m\geqslant n$, m, $n\in\mathbf{N}^*$, 得

$$nf\left(\frac{m}{n}\right)-(n-1)\varepsilon \leqslant f(m) \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)+(n-1)\varepsilon,$$

即 $f(m)-(n-1)\varepsilon \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant f(m)+(n-1)\varepsilon$. 将此式与③结合,可知

$$mf(1)-(m-1)\varepsilon-(n-1)\varepsilon \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant mf(1)+(m-1)\varepsilon+(n-1)\varepsilon,$$

即
$$mf(1)-(m+n-2)\varepsilon \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant mf(1)+(m+n-2)\varepsilon,$$

两边除以 m, 得

$$f(1)-\left(1+\frac{n-2}{m}\right)\varepsilon \leqslant \frac{n}{m}f\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant f(1)+\left(1+\frac{n-2}{m}\right)\varepsilon,$$

令$\frac{n}{m}=x$, 就有$\left|\frac{f(x)}{x}-f(1)\right| \leqslant \left(1+\frac{n-2}{m}\right)\varepsilon < \left(1+\frac{1}{x}\right)\varepsilon \leqslant 2\varepsilon$.

所以,令 $q=f(1)$ 即可知结论成立.

1.6.8 ★★ 设 $\mathbf{Q}_+$ 是全体正有理数集. 试作一个函数 f: $\mathbf{Q}_+ \to \mathbf{Q}_+$,使得对一切 x, $y \in \mathbf{Q}_+$,都有 $f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$. ①

解析 令 $x=1$ 得 $f(f(y))=\frac{f(1)}{y}$. ②

在②中令 $y=f(1)$ 得 $f(f(f(1)))=1$. 令 $y=1$ 得

$$f(f(1))=f(1).$$

于是 $f(1)=f(f(1))f(f(f(1)))=1$. ②式为 $f(f(y))=\frac{1}{y}$. ③

设 p_i 是第 i 个质数,令 $f(p_i)=\begin{cases} p_{i+1}, & \text{若 } i \text{ 是奇数}, \\ \frac{1}{p_{i-1}}, & \text{若 } i \text{ 是偶数}. \end{cases}$ ④

显然有 $f(f(p_i))=\frac{1}{p_i}$, 即满足③式. 对于 $x \in \mathbf{Q}_+$, x 可表示成 $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$, 其中 α_1, α_2, $\cdots$, α_n 是整数,令

$$f(x)=f(p_1)^{\alpha_1}f(p_2)^{\alpha_2}\cdots f(p_n)^{\alpha_n}. \quad ⑤$$

由④,⑤两式定义的 $\mathbf{Q}_+ \to \mathbf{Q}_+$ 的函数 f 显然满足 $f(xz)=f(x)f(z)$, 从而满足①式.

1.6.9 ★★ 求所有的实数 a,使得存在函数 f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 满足: 对任意实数 x, y

都有

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)+a|x-y|.$$

解析　若 $a\leqslant 0$，取 $f(x)=x$，满足要求. 若 $a>0$，假设存在这样的函数.

取 $x=\frac{i}{n}$，$y=\frac{i+2}{n}$，则 $f\left(\frac{i}{n}\right)+f\left(\frac{i+2}{n}\right)\geqslant 2f\left(\frac{i+1}{n}\right)+\frac{4a}{n}$. 故

$$\sum_{i=k}^{n-1+k}\left(f\left(\frac{i}{n}\right)+f\left(\frac{i+2}{n}\right)\right)\geqslant\sum_{i=k}^{n-1+k}2f\left(\frac{i+1}{n}\right)+4a,$$

即
$$f\left(\frac{n+1+k}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\geqslant f\left(\frac{n+k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)+4a,$$

所以
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{n+1+k}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\geqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{n+k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)+4an,$$

这表明 $f(2)+f(0)\geqslant 2f(1)+2an$，$f(2)+f(0)-2f(1)\geqslant 2an$.

由于 $f(2)+f(0)-2f(1)$ 为定值，而 $a>0$，故当 n 充分大时，有 $2an>f(2)+f(0)-2f(1)$，矛盾！所以，$a\leqslant 0$.

1.6.10 ★★ 求所有的函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意实数 x 都有 $x(f(x+1)-f(x))=f(x)$，且对任意实数 x，y 都有 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$.

解析　由 $x(f(x+1)-f(x))=f(x)$，知 $xf(x+1)=(x+1)f(x)$. 于是当 $x\neq-1$，0 时，有 $\frac{f(x+1)}{x+1}=\frac{f(x)}{x}$. 从而 $\frac{f(x+m)}{x+m}=\frac{f(x)}{x}$ $(m\in\mathbf{N}^*,\ x,\ x+m\neq 0)$.

若存在 x，y，使 $\frac{f(x)}{x}=k$，$\frac{f(y)}{y}=l$，$k\neq l$. 不妨设 $k<l$.

由于 $\frac{f(x+t)}{x+t}=k$ $(t\in\mathbf{N}^*,\ x+t\neq 0)$，故可设 $x>y>x-1$.

$$|f(x)-f(y)|=|kx-ly|\leqslant|y-x|.$$

两边同除以 y，并令 $y\to+\infty$，得 $|k-l|\leqslant 0$，矛盾.

这表明对一切 $x\neq-1$，0，$f(x)=kx$. 在 $x(f(x+1)-f(x))=f(x)$ 中，令 $x=0$，得 $f(x)=0$. 令 $x=-2$，得 $-2(f(-1)-f(-2))=-2k$，即 $f(-1)=-k$. 在 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$ 中令 $x=x$，$y=x+1$，得 $|k|\leqslant 1$.

所以，对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=kx$ $(|k|\leqslant 1)$. 易知这样的函数合乎要求.

1.6.11 ★★★ 求所有的 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意 x，$y\in\mathbf{R}$，均有

$$f(x^2+y+f(y))=2y+f(x)^2. \qquad ①$$

解析　先证：$f(a)=0$ 的充要条件是 $a=0$.

由条件,可知,存在 $a\in\mathbf{R}$,使 $f(a)=0$ $\left(\text{式中令 } y=-\dfrac{f(x)^2}{2}\text{即可}\right)$. 在①中取 $x=0$, $y=a$,就有 $0=2a+f(0)^2$. 又在①中令 $y=0$,有 $f^2(x)=f(x^2+f(0))$,用 $-x$ 代此式中的 x,就有 $f^2(-x)=f(x^2+f(0))$,即 $f^2(x)=f^2(-x)$,从而 $f(-a)=0$,这样在①中取 $x=0$, $y=-a$,又有 $0=-2a+f(0)^2$,结合 $0=2a+f(0)^2$,得 $2f(0)^2=0$, $f(0)=0$,进而 $a=0$. 故 $f(a)=0\Leftrightarrow a=0$.

再证: $f(x)$ 是奇函数,且当 $x>0$ 时, $f(x)>0$.

事实上,①中令 $y=0$,知 $f(x^2)=f(x)^2$,从而当 $x>0$ 时,有 $f(x)>0$. 现在对 $\alpha>0$,①中取 $(x,y)=\left(\sqrt{\alpha},-\dfrac{1}{2}f(\alpha)\right)$,得

$$f\left(\alpha-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(\frac{-f(\alpha)}{2}\right)\right)=-f(\alpha)+f(\sqrt{\alpha})^2=-f(\alpha)+f((\sqrt{\alpha})^2)=0.$$

由前所证,知 $\alpha=\dfrac{f(\alpha)}{2}-f\left(\dfrac{-f(\alpha)}{2}\right)$,因此,

$$f(-\alpha)=f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(\frac{-f(\alpha)}{2}\right)\right). \qquad ②$$

在①中,取 $(x,y)=\left(0,-\dfrac{1}{2}f(\alpha)\right)$,就有

$$f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(\frac{-f(\alpha)}{2}\right)\right)=-f(\alpha), \qquad ③$$

对比②,③可知 $f(x)$ 为奇函数.

最后证: $f(x)=x$. 由前所证,只需证:对任意 $x>0$,有 $f(x)=x$. 为此,对任意 $\alpha>0$,①中取 $(x,y)=(\sqrt{\alpha},-\alpha)$,就有

$$f(f(-\alpha))=-2\alpha+f(\sqrt{\alpha})^2=-2\alpha+f(\alpha),$$

故 $2\alpha=f(\alpha)-f(f(-\alpha))=f(\alpha)+f(f(\alpha))$. 进而

$$f(2\alpha)=f(f(\alpha)+f(f(\alpha)))=f(0^2+f(\alpha)+f(f(\alpha)))=2f(\alpha)+f(0)^2=2f(\alpha),$$

再在①中取 $(x,y)=(\sqrt{2\alpha},-\alpha)$,就有

$$f(2\alpha-\alpha+f(-\alpha))=-2\alpha+f(\sqrt{2\alpha})^2=-2\alpha+f(2\alpha)=-2\alpha+2f(\alpha).$$

即 $f(\alpha-f(\alpha))=-2(\alpha-f(\alpha))$. 于是,令 $\beta=\alpha-f(\alpha)$,就有 $f(\beta)=-2\beta$,如果 $\beta>0$,则 $-2\beta<0$,而 $f(\beta)>0$,矛盾;如果 $\beta<0$,则 $-2\beta>0$,此时 $f(\beta)=-f(-\beta)<0$,亦矛盾. 故 $\beta=0$. 即 $f(\alpha)=\alpha$.

综上,可知满足条件的函数只有一个,即 $f(x)=x$($f(x)=x$ 满足条件是显

然的).

1.6.12 ☆☆ 用 $\mathbf{R}^*$ 表示由所有非零实数组成的集合. 求所有的函数 f: $\mathbf{R}^* \to \mathbf{R}^*$, 使得对任意满足 $x^2+y\neq 0$ 的非零实数 x, y, 都有 $f(x^2+y)=f^2(x)+\dfrac{f(xy)}{f(x)}$.

解析 先证: $f(1)=1$. 为此, 设 $f(1)=c$, 在条件式

$$f(x^2+y)=f(x)^2+\frac{f(xy)}{f(x)} \qquad ①$$

中, 令 $x=\pm 1$, $y\notin\{-1, 0\}$, 可得 $f(1+y)=f(1)^2+\dfrac{f(y)}{f(1)}$ ②, $f(1+y)=f(-1)^2+\dfrac{f(-y)}{f(-1)}$ ③, 这两式中, 令 $y=1$, 就有 $f(2)=f(1)^2+1=f(-1)^2+1\Rightarrow f(-1)^2=f(+1)^2\Rightarrow f(-1)=\pm c$.

(1) 若 $f(-1)=c$, 由②, ③得 $\dfrac{f(y)}{f(1)}=\dfrac{f(-y)}{f(-1)}\Rightarrow f(y)=f(-y)$.

在②中, 令 $y=-2$, 得 $c=f(-1)=f(1)^2+\dfrac{f(-2)}{f(1)}=c^2+\dfrac{f(2)}{c}=c^2+\dfrac{c^2+1}{c}\Rightarrow c^3+1=0\Rightarrow c=-1$. 进而 $f(2)=2$, $f(3)=f(1)^2+\dfrac{f(2)}{f(1)}=-1$, $f(4)=2$. 但在①中, 令 $x=2$, $y=-2$, 得 $2=f(2)=f(2)^2+\dfrac{f(-4)}{f(2)}=f(2)^2+\dfrac{f(4)}{f(2)}=2^2+1=5$, 矛盾.

(2) 若 $f(-1)=-c$, 同上可得(利用②、③): $f(y)=-f(-y)$. ④

类似地, 在②中, 令 $y=-2$, 得 $-c=f(-1)=f(1)^2+\dfrac{f(-2)}{f(1)}=c^2-\dfrac{f(2)}{f(1)}=c^2-\dfrac{c^2+1}{c}$, 于是 $c^3=1$, 得 $c=1$. 因此, $f(1)=1$.

由 $f(1)=1$, 在①中, 令 $y=1$, 得 $f(x^2+1)=f(x)^2+1$, 而②变为 $f(1+y)=1+f(y)$…⑤. 因此, $1+f(x)^2=f(1+x^2)=1+f(x^2)$, 得 $f(x^2)=f(x)^2$…⑥, 这表明: 对任意 $x>0$, 都有 $f(x)>0$. 进而可知对任意 x, $y>0$, 有 $f(x^2+y)=f(x)^2+\dfrac{f(xy)}{f(x)}>f(x)^2=f(x^2)$, 这表明: $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 结合④可知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^*$ 上递增.

最后, 我们证明: 对任意 $x\in\mathbf{Q}\backslash\{0\}$, 有 $f(x)=x$, 这样结合 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^*$ 上单调增, 可知对任意 $x\in\mathbf{R}^*$, 都有 $f(x)=x$ (Cauchy 方法).

利用⑤及 $f(1)=1$, 结合数学归纳法可证: 对任意 $x\in\mathbf{N}^*$, 有 $f(x)=x$, 再由④知对任意 $x\in\mathbf{Z}^-$, 有 $f(x)=x$, 从而对任意 $x\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$, 有 $f(x)=x$.

现在对任意 $x\in\mathbf{Q}\backslash\{0\}$,写 $x=\frac{q}{p}$, $p\in\mathbf{N}^*$, $q\in\mathbf{Z}$, $(p, q)=1$, $q\neq0$, 则 $f(x^2+p)=f(x)^2+\frac{f(q)}{f(x)}$, 利用⑤、⑥知 $f(x^2+p)=f(x^2)+p=f(x)^2+p$, 结合 $f(q)=q$, 可知 $f(x)^2+p=f(x)^2+\frac{q}{f(x)}\Rightarrow f(x)=\frac{q}{p}=x$. 所以,对任意 $x\in\mathbf{Q}\backslash\{0\}$, 有 $f(x)=x$.

综上可知,符合条件的函数只有一个,即 $f(x)=x$.

第 2 章　三 角 函 数

2.1　三 角 函 数

2.1.1 ★ 设 $x\in\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$，则 $a_1 = \cos(\sin x\pi)$，$a_2 = \sin(\cos x\pi)$，$a_3 = \cos(x+1)\pi$ 的大小关系是(　　).

(A) $a_3 < a_2 < a_1$　　(B) $a_1 < a_3 < a_2$

(C) $a_3 < a_1 < a_2$　　(D) $a_2 < a_3 < a_1$

解析　依题设知 $\cos(x+1)\pi < 0$. 设 $y=-x$，则 $y\in\left(0, \frac{1}{2}\right)$，且 $a_1 = \cos(\sin y\pi)$，$a_2 = \sin(\cos y\pi)$. 又 $\sin y\pi+\cos y\pi=\sqrt{2}\sin\left(y\pi+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$，所以 $0<\cos y\pi<\frac{\pi}{2}-\sin y\pi<\frac{\pi}{2}$. 于是 $0<\sin(\cos y\pi)<\cos(\sin y\pi)$，故选 A.

评注　上述解析用到等式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$，φ 的终边过点 (a, b)，$a\neq 0$.

2.1.2 ★ 当 $0<x\leqslant 1$ 时，下列不等式正确的是(　　).

(A) $\frac{\sin x}{x}<\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\leqslant\frac{\sin x^2}{x^2}$　　(B) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}\leqslant\frac{\sin x^2}{x^2}$

(C) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x^2}{x^2}\leqslant\frac{\sin x}{x}$　　(D) $\frac{\sin x^2}{x^2}\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2<\frac{\sin x}{x}$

解析　因为 $0<x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$，故有 $0<\sin x<x$，即 $0<\frac{\sin x}{x}<1$. 所以，$\frac{\sin x}{x}>\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$. 又因为 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是减函数，而 $0<x^2\leqslant x\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\sin x^2}{x^2}\geqslant\frac{\sin x}{x}$，故选 B.

2.1.3 ★ 已知 α、β 均为锐角，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$. 若设 $\sin\beta=x$，$\cos\alpha=y$，则 y 与 x 的函数关系式为(　　).

(A) $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x\ (0<x<1)$

(B) $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x\ \left(\frac{4}{5}<x<1\right)$

(C) $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{5}x\ \left(\frac{4}{5}<x<1\right)$

(D) $y=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}-\frac{3}{5}x\ (0<x<1)$

解析 由已知条件得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\sqrt{1-x^2}$. 故 $y=\cos\alpha=\cos[(\alpha+\beta)-\beta]=\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta=-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x$.

x 的取值范围应满足不等式组 $\begin{cases}0<x<1,\\ 0<-\frac{4}{5}\sqrt{1-x^2}+\frac{3}{5}x<1,\end{cases}$ 解得 $\frac{4}{5}<x<1$. 故选 B.

2.1.4 ★ 若 $\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos x+\cos y=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 $\sin(x+y)$ 等于(　　).

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(D) 1

解析 把两个式子分别平方，相加得

$$(\sin^2x+\cos^2x)+(\sin^2y+\cos^2y)+2(\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y)=2,$$

所以 $\cos(x-y)=0$. 把两个式子相乘得

$$(\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x)+(\sin x\cdot\cos x+\sin y\cdot\cos y)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

即 $\sin(x+y)+\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 所以 $\sin(x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选 B.

2.1.5 ★ 已知 $\sin 2x=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}$，$\cos^2x=\sin\theta\cdot\cos\theta$. 那么，$\cos 2x$ 的值是(　　).

(A) $\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$　　(B) $\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$

(C) $\frac{-1-\sqrt{33}}{8}$　　(D) 0

解析 注意到 $\sin^2 2x=\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta}{2}\right)^2=\frac{1+2\sin\theta\cdot\cos\theta}{4}=\frac{1+2\cos^2x}{4}$，有

$1-\cos^2 2x=\dfrac{2+\cos 2x}{4}$. 解得 $\cos 2x=\dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$.

又 $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\sin\theta\cdot\cos\theta-1=\sin 2\theta-1\leqslant 0$，所以，$\cos 2x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{8}$，故选 C.

评注 发现隐含的条件 $\cos 2x\leqslant 0$ 是解本题的一个关键点.

2.1.6 ★★ 已知函数 $y=\sin x+a\cos x$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{5\pi}{3}$ 对称. 则函数 $y=a\sin x+\cos x$ 的图象关于直线(　　)对称.

(A) $x=\dfrac{\pi}{3}$　　(B) $x=\dfrac{2\pi}{3}$　　(C) $x=\dfrac{11\pi}{6}$　　(D) $x=\pi$

解析 令 $f(x)=\sin x+a\cos x$，$g(x)=a\sin x+\cos x$. 由题设有 $f(x)=f\left(\dfrac{10\pi}{3}-x\right)$.

又 $f(x)=g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$，所以 $f\left(\dfrac{10\pi}{3}-x\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{10\pi}{3}+x\right)$，从而 $g\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{10\pi}{3}+x\right)$. 所以，$g(x)$的一个对称轴为

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

又 $g(x)$的周期为 2π,故其另一个对称轴为 $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{11\pi}{6}$. 故选 C.

评注 存在对称轴的周期函数其图象有无数多条对称轴.

2.1.7 ★★ 设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$. 若实数 a, b, c 使得 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立,则$\dfrac{b\cos c}{a}$的值等于(　　).

(A) $-\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) -1　　(D) 1

解析 易知对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)+f(x-\pi)=2$. 于是取 $a=b=\dfrac{1}{2}$，$c=\pi$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$af(x)+bf(x-c)=1$，由此得$\dfrac{b\cos c}{a}=-1$.

更一般地,由题设可得

$$f(x)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)+1,\ f(x-c)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi-c)+1,$$

其中 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\tan\varphi=\dfrac{2}{3}$. 于是，$af(x)+bf(x-c)=1$ 可化为

$$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi-c)+a+b=1,$$

即 $\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi)\cos c-\sqrt{13}b\cos(x+\varphi)\sin c+(a+b-1)=0$,
所以, $\sqrt{13}(a+b\cos c)\sin(x+\varphi)-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)+(a+b-1)=0$.

由已知条件,上式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,故必有 $\begin{cases}a+b\cos c=0, & ①\\ b\sin c=0, & ②\\ a+b-1=0. & ③\end{cases}$

若 $b=0$,则由①知 $a=0$, 显然不满足③式,故 $b\neq0$. 由②知 $\sin c=0$,故 $c=2k\pi+\pi$ 或 $c=2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. 当 $c=2k\pi$ 时,$\cos c=1$, 则①,③两式矛盾. 故 $c=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathbf{Z})\cos c=-1$. 由①,③知 $a=b=\frac{1}{2}$, 所以 $\frac{b\cos c}{a}=-1$, 故选 C.

评注 由于单项选择题答案的唯一正确性,上述解答关于一般情形的讨论可以省略. 但若将原题改为填空题或解答题,则上述关于一般性的过程是必不可少的.

2.1.8 ★ 已知 $\sin\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}=1$. 则 $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}=$ ________.

解析 由 $\sin\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}=1$,有 $\left(\tan\frac{\alpha}{2}-2\right)^2=1+\tan^2\frac{\alpha}{2}$. 于是, $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$.

又 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha+1-\cos\alpha}$, 故原式 $=\frac{3}{4}$.

又当 $\alpha=(4k+1)\pi$ 时, $\frac{1+\sin\pi+\cos\pi}{1+\sin\pi-\cos\pi}=0$,故原式 $=0$. 从而知,原式等于 $\frac{3}{4}$ 或 0.

评注 将正、余弦用正、余切表示时,角的范围可能变小,这是在解题时应留心的地方.

2.1.9 ★ 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$, $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间有关系式 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$, 其中 $k>0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为________.

解析 由 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|)^2$ 得 $8k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3-k^2)\boldsymbol{a}^2+(3k^2-1)\boldsymbol{b}$.
即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{(3-k^2)\boldsymbol{a}^2+(3k^2-1)\boldsymbol{b}^2}{8k}$.

因为 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$, 所以, $\boldsymbol{a}^2=1$, $\boldsymbol{b}^2=1$, 故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{k^2+1}{4k}$.

因为 $k>0$, $k^2+1\geqslant2k$, 则 $\frac{k^2+1}{4k}\geqslant\frac{2k}{4k}=\frac{1}{2}$. 所以, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

2.1.10 ★ 设集合 M 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体: 存在非零常数 T,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+T)=Tf(x)$ 成立. 若函数 $f(x)=\sin kx\in M$, 则实数 k 的取值范围是________.

解析 当 $k=0$ 时，$f(x)=0\in M$.

当 $k\neq 0$ 时，因为 $f(x)=\sin kx\in M$，存在非零常数 T，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $\sin(kx+kT)=T\sin kx$.

当 $x=0$ 时，$\sin kT=0$. 所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $\cos kT\cdot\sin kx=T\sin kx$. 故 $T=\cos kT=\pm 1$. 代入 $\sin kT=0$，得 $k=m\pi$，$m\in\mathbf{Z}$.

2.1.11 ★★ 设 a、b 是非零实数，$x\in\mathbf{R}$. 若

$$\frac{\sin^4 x}{a^2}+\frac{\cos^4 x}{b^2}=\frac{1}{a^2+b^2}, \qquad ①$$

则 $\dfrac{\sin^{2\,008}x}{a^{2\,006}}+\dfrac{\cos^{2\,008}x}{b^{2\,006}}=$ ________.

解析 $(a^2+b^2)\left(\dfrac{\sin^4 x}{a^2}+\dfrac{\cos^4 x}{b^2}\right)\geqslant(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1$，由 ① 知等号成立，所以 $\dfrac{\sin^2 x}{a^2}=\dfrac{\cos^2 x}{b^2}=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{a^2+b^2}$，从而

$$\begin{aligned}\frac{\sin^{2\,008}x}{a^{2\,006}}+\frac{\cos^{2\,008}x}{b^{2\,006}}&=\frac{1}{a^{2\,006}}\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^{1\,004}+\frac{1}{b^{2\,006}}\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^{1\,004}\\&=\frac{1}{(a^2+b^2)^{1\,003}}.\end{aligned}$$

2.1.12 ★★ 已知 x，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$，且

$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0,\\4y^3+\sin y\cdot\cos y+a=0,\end{cases}$$

则 $\cos(x+2y)=$ ________.

解析 观察题中的方程组，可将其变形为

$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0, & ①\\(2y)^3+\sin 2y+2a=0. & ②\end{cases}$$

构造函数 $f(t)=t^3+\sin t$，显然当 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(t)$ 单调递增且为奇函数.

由①、②可得 $f(x)=2a=f(-2y)$，所以 $x=-2y$，即 $x+2y=0$. 所以 $\cos(x+2y)=1$.

2.1.13 ★★ 设 α，β，γ 满足 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0$，则 $\gamma-\alpha=$ ________.

解析 设 $f(x)=\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)$，由 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\equiv 0$，

有 $f(-\alpha)=0$，$f(-\beta)=0$，$f(-\gamma)=0$，即

$$\cos(\beta-\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)=-1,\ \cos(\alpha-\beta)+\cos(\gamma-\beta)=-1,$$
$$\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=-1,$$

所以 $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\gamma-\beta)=\cos(\gamma-\alpha)=-\dfrac{1}{2}$.

因为 $0<\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，所以 $\beta-\alpha$，$\gamma-\alpha$，$\gamma-\beta\in\left\{\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right\}$. 又 $\beta-\alpha<\gamma-\alpha$，$\gamma-\beta<\gamma-\alpha$，只有 $\beta-\alpha=\gamma-\beta=\dfrac{2\pi}{3}$，$\gamma-\alpha=\dfrac{4\pi}{3}$.

另一方面，令 $\beta=\alpha+\dfrac{2\pi}{3}$，$\gamma=\alpha+\dfrac{4\pi}{3}$，对任意实数 x，记 $x+\alpha=\theta$，由于三点 $(\cos\theta,\sin\theta)$，$\left(\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$，$\left(\cos\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right),\sin\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)\right)$ 构成单位圆上正三角形的三个顶点，易知有 $\cos\theta+\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\theta+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$，即

$$\cos(x+\alpha)+\cos(x+\beta)+\cos(x+\gamma)=0.$$

2.1.14 ★★ 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}\right)$，则 $f(x)$的最小值为________.

解析 因为在$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上，$\sin\pi\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\geqslant 0$，所以

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)+2}{\sqrt{x}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{x}}\geqslant\frac{2}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

在 $x=\dfrac{5}{4}$ 时，$f(x)$取最小值$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

2.1.15 ★★ 在$\triangle ABC$中，已知 $\sin A\cdot\cos^2\dfrac{C}{2}+\sin C\cdot\cos^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}\sin B$. 求 $\cos\dfrac{A-C}{2}-2\sin\dfrac{B}{2}$ 的值.

解析 由已知得

$$\sin A\cdot\frac{1+\cos C}{2}+\sin C\cdot\frac{1+\cos A}{2}=\frac{3}{2}\sin B.$$

即 $$\sin A+\sin C+\sin A\cdot\cos C+\cos A\cdot\sin C=3\sin B.$$

从而 $$\sin A+\sin C+\sin(A+C)=3\sin B,$$

即 $$\sin A+\sin C=2\sin B,$$

故 $$2\sin\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{A-C}{2}=4\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}.$$

所以，$\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$，即 $\cos\frac{A-C}{2}-2\sin\frac{B}{2}=0$.

评注 题中条件等价于三角形的三边 a、b、c 成等差数列. 由 $\sin A+\sin C=2\sin B$ 可演变出一系列结果，如 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$，$5\cos A-4\cos A\cos C+5\cos C=4$ 等等.

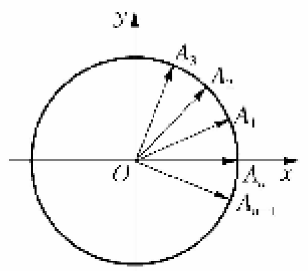
2.1.16 ★★ 试证：如果 n 是大于 1 的自然数，那么

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0.$$

解析 在平面上建立直角坐标系 xOy，并考察 n 个单位向量$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，…，$\overrightarrow{OA_{n-1}}$，$\overrightarrow{OA_n}$，它们与 Ox 轴夹角分别为$\frac{2\pi}{n}$，$\frac{4\pi}{n}$，…$\frac{(2n-2)\pi}{n}$，$\frac{2n\pi}{n}$(如图). 设$\vec{V}$是这些向量的和：

$$\vec{V}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_n},$$

X 是$\vec{V}$ 在 x 轴上的投影.



将 n 个向量$\overrightarrow{OA_i}$ 绕点 O 旋转角度$\frac{2\pi}{n}$(因 $n>1$，所以转角小于 2π)，于是它们的和向量，也即$\vec{V}$也旋转了$\frac{2\pi}{n}$. 旋转后所得的向量组与原来的向量组没有任何差别，因为向量$\overrightarrow{OA_1}$ 变成了向量$\overrightarrow{OA_2}$，向量$\overrightarrow{OA_2}$ 变成了向量$\overrightarrow{OA_3}$，等等，最后向量$\overrightarrow{OA_{n-1}}$变成了向量$\overrightarrow{OA_n}$，向量$\overrightarrow{OA_n}$ 变成了向量$\overrightarrow{OA_1}$. 但若旋转后的向量组与旋转前的向量组重合，则旋转前后的和向量应当一样，也就是向量$\vec{V}$. 因此，向量$\vec{V}$在绕 O 点旋转比 2π 小的角$\frac{2\pi}{n}$时是不变的. 只有零向量才具有这种性质. 零向量在 x 轴上的分量等于零，因此 $X=0$. 于是本题得证.

2.1.17 ★★ (1) 设 n 是一个大于 3 的质数，求 $\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+2\cos\frac{2n\pi}{n}\right)$ 的值；

(2) 设 n 是大于 3 的自然数,求 $\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$ 的值.

解析 (1) 记 $w=e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 显然 $w^n=1$, $w^{-\frac{n}{2}}=-1$, $w^k+w^{-k}=2\cos\frac{2k\pi}{n}$. 于是有

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)&=\prod_{k=1}^{n}(1+w^k+w^{-k})=\prod_{k=1}^{n}w^{-k}(w^k+w^{2k}+1)\\&=w^{-\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-w^{3k}}{1-w^k}\cdot(w^n+w^{2n}+1)\\&=(-1)^{n+1}\cdot 3\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-w^{3k}}{1-w^k}.\end{aligned}$$

因为 n 是大于 3 的质数,所以 $(-1)^{n+1}=1$,并且 3×1, 3×2, $\cdots$, $3(n-1)\ (\bmod n)$,取遍所有的 n 的剩余类,从而有 $\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^{3k})=\prod_{k=1}^{n-1}(1-w^k)$,因此

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=3.$$

(2) 由于 $z^{2n}-1=0$ 的 $2n$ 个根是 ±1 和 $z_k=e^{\pm\frac{k\pi i}{n}}$ $(k=1, 2, \cdots, n-1)$,因此

$$z^{2n}-1=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-e^{\frac{k\pi i}{n}})(z-e^{-\frac{k\pi i}{n}})=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2+1-2z\cos\frac{k\pi}{n}\right).$$

取 $z=e^{\frac{2\pi i}{3}}$,则 $z^2+1=-z$,于是我们有

$$z^{2n}-1=(z^2-1)(-z)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right),$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{z^{2n}-1}{(z^2-1)(-z)^{n-1}},$$

当 $n=3k$ 时, $z^{2n}=z^{6k}=(e^{\frac{2\pi i}{3}})^{6k}=1$,因而此时 $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=0$;

当 $n=3k+1$ 时, $z^{2n}=z^{6k+2}=z^2$,因而此时

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{z^2-1}{(z^2-1)(-z)^{3k}}=(-1)^{3k}=(-1)^{n-1};$$

当 $n=3k+2$ 时, $z^{2n}=z^{6n+4}=z$,因而此时

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{z-1}{(z^2-1)(-z)^{3k+1}}=(-1)^{3k+1}\cdot\frac{z-1}{(z^2-1)\cdot z}$$

$$=(-1)^{3k+1}\frac{z-1}{z^3-z}=(-1)^{3k+1}\frac{z-1}{1-z}=(-1)^{3k+2}=(-1)^n.$$

综上所述,我们有

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\begin{cases}0, & n=3k\text{ 时},\\ (-1)^{n-1}, & n=3k+1\text{ 时},\quad (k\in\mathbf{N}^*)\\ (-1)^n, & n=3k+2\text{ 时}.\end{cases}$$

2.1.18 ★★ 证明: $\sin\frac{\pi}{14}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}$.

解析 设要证等式的左边为 x.

$$x\cdot 8\cdot\cos\frac{\pi}{14}=2\cdot\left(2\cdot\sin\frac{2\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}\right)\sin\frac{3\pi}{14}$$

$$=2\left(\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}\right)\sin\frac{3\pi}{14}=\sin\frac{6\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14},$$

两边同除以 $8\cdot\cos\frac{\pi}{14}$, 得 $x=\frac{1}{8}$. 即原等式成立.

2.1.19 ★★ 在$\triangle ABC$ 中,

(1) 求证: $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1-2\cos A\cos B\cos C$;

(2) 如果 $\frac{\cos A}{39}=\frac{\cos B}{33}=\frac{\cos C}{25}$, 求 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 三数值之比.

解析 (1)

$$\begin{aligned}&\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C\\ =&\frac{1}{2}(1+\cos 2A)+\frac{1}{2}(1+\cos 2B)+\cos^2C\\ =&1+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B)+\cos^2C\\ =&1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C\\ =&1-\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\\ =&1-2\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

(2) 令 $\frac{\cos A}{39}=\frac{\cos B}{33}=\frac{\cos C}{25}=\frac{1}{x}$. 由于 A, B, C 不可能都是钝角,因此 $x>0$,从而 A, B, C 都是锐角. 于是,我们有

$$\cos A=\frac{39}{x},\ \cos B=\frac{33}{x},\ \cos C=\frac{25}{x}. \qquad ①$$

利用(1)可得

$$\left(\frac{39}{x}\right)^2+\left(\frac{33}{x}\right)^2+\left(\frac{25}{x}\right)^2=1-2\cdot\frac{39}{x}\cdot\frac{33}{x}\cdot\frac{25}{x},$$

化简,有 $x^3-3\,235x-990\cdot 65=0$,即 $(x-65)(x^2+65x+990)=0$,因为 $x>0$,所以只有一解 $x=65$.

代入①,得 $\cos A=\frac{3}{5}$,$\cos B=\frac{33}{65}$,$\cos C=\frac{5}{13}$. 注意到 A,B,C 都是锐角,我们有 $\sin A=\frac{4}{5}$,$\sin B=\frac{56}{65}$,$\sin C=\frac{12}{13}$. 故 $\sin A:\sin B:\sin C=13:14:15$.

2.1.20 ★★ 设 A、B、C 为一个三角形的三个内角,x 满足 $\cos(x+A)\cdot\cos(x+B)\cdot\cos(x+C)+\cos^3 x=0$. 证明:

(1) $\tan x=\cot A+\cot B+\cot C$;

(2) $\sec^2 x=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$.

解析 将已知等式两端同除以 $\cos^3 x\cdot\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$,得

$$(\tan x-\cot A)(\tan x-\cot B)(\tan x-\cot C)-\frac{1}{\sin A\sin B\sin C}=0. \qquad ①$$

令 $S=\cot A+\cot B+\cot C$,即 $S=\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$,注意到,当 $A+B+C=\pi$ 时

$$\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A=1, \qquad ②$$

展开①可得 $\tan^3 x-S\tan^2 x+\tan x-S=0$,即 $(\tan x-S)(\tan^2 x+1)=0$,所以 $\tan x=S=\cot A+\cot B+\cot C$. 于是(1)得证.

再将(1)两边平方并加1(利用②)即可证明(2):$\sec^2 x=\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2+1=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$. 于是(2)得证.

评注 $\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A=1$ 是三角形中一个基本的恒等式.

2.1.21 ★★ 任给三个角 A,B,C 满足 $\cos A+\cos B+\cos C=\sin A+\sin B+\sin C=0$. 证明:$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ 等于常数,并求出这个常数.

解析 设复数 $z_A=\cos A+\mathrm{i}\sin A$ 等,其模均为1,和 $z_A+z_B+z_C=0$,所以 z_A、z_B、z_C 两两的夹角为 $120°$. 即可设 $B=A+120°$,$C=A-120°$,则

$$\begin{aligned}\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C&=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}\\&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos(2A+240°)+\cos(2A-240°))\end{aligned}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+2\cos 2A\cos 240^\circ)=\frac{3}{2}.$$

2.1.22 ☆☆ 设 n 是正整数,实数 $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0, 1, 2, \cdots, n, \lambda$ 是整数),证明下面的等式

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x.$$

解析 因为 $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$, 故 $2^k x\neq\lambda\pi$ ($k=0, 1, \cdots, n, \lambda$ 为整数), $\sin 2^k x\neq 0$, $\cot 2^k x$ 有意义. 注意到

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\cot\alpha-\cot 2\alpha,$$

取 $\alpha=x, 2x, 2^2x, \cdots, 2^{n-1}x$, 则有

$$\frac{1}{\sin 2x}=\cot x-\cot 2x,\ \frac{1}{\sin 4x}=\cot 2x-\cot 4x,\ \cdots,$$

$$\frac{1}{\sin 2^{n-1}x}=\cot 2^{n-2}x-\cot 2^{n-1}x,\ \frac{1}{\sin 2^n x}=\cot 2^{n-1}x-\cot 2^n x.$$

将上述 n 个等式左右分别相加得

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x.$$

2.1.23 ☆☆ 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数,关于变量 x 的函数为

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\frac{1}{2^2}\cos(a_3+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x).$$

证明:如果 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 则 $x_1-x_2=m\pi$, 其中 m 是一个整数.

解析
$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos[(a_k+x_1)+(x-x_1)]\\&=\cos(x-x_1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos(a_k+x_1)-\sin(x-x_1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\sin(a_k+x_1)\\&=\cos(x-x_1)f(x_1)+\sin(x-x_1)f\left(x_1+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(x-x_1)f\left(x_1+\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

易知 $f\left(x_1+\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$, 否则,对任意 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)\equiv 0$, 而 $f(-a_1)=\cos 0+$

$\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cos(a_k-a_1)\geqslant 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0$，矛盾.

于是，由 $f(x_2)=0$ 及 $f\left(x_1+\frac{\pi}{2}\right)\neq 0$ 可得 $\sin(x_2-x_1)=0$. 所以 $x_1-x_2=m\pi$，m 为整数.

2.1.24 ☆☆ 设 $F_r=x^r\sin(rA)+y^r\sin(rB)+z^r\sin(rC)$，式中 x、y、z、A、B、C 为实数，而 $A+B+C$ 为 π 的整数倍. 试证若 $F_1=F_2=0$，则对一切正整数 r，有 $F_r=0$.

解析 设复数 $\alpha=x(\cos A+\mathrm{i}\sin A)$，$\beta=y(\cos B+\mathrm{i}\sin B)$，$\gamma=z(\cos C+\mathrm{i}\sin C)$ 是三次方程

$$u^3-au^2+bu-c=0 \qquad ①$$

的三个根. 由韦达定理知：

$$\begin{aligned}
a&=\alpha+\beta+\gamma=x\cos A+y\cos B+z\cos C+\mathrm{i}F_1=\text{实数},\\
b&=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\\
&=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]\\
&=\frac{1}{2}[a^2-(x^2\cos 2A+y^2\cos 2B+z^2\cos 2C+\mathrm{i}F_2)]\\
&=\frac{1}{2}[a^2-x^2\cos 2A-y^2\cos 2B-z^2\cos 2C]=\text{实数};\\
c&=\alpha\beta\gamma=xyz[\cos(A+B+C)+\mathrm{i}\sin(A+B+C)]\\
&=\pm xyz=\text{实数},
\end{aligned}$$

可见方程①是以 α、β、γ 为根的实系数三次方程.

设 $S_r=\alpha^r+\beta^r+\gamma^r$（$r$ 为正整数）. 欲证 $F_r=0$，只需证 S_r 是实数. 以下用数学归纳法证明 S_r 是实数.

已知 $F_1=F_2=0$，所以 $S_1=\alpha+\beta+\gamma$，$S_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 均为实数. $S_0=\alpha^0+\beta^0+\gamma^0=3$ 也是实数. 若 S_{r-2}、S_{r-1}、S_r 均为实数，则由于 α、β、γ 满足方程①，故有等式 $S_{r+1}-aS_r+bS_{r-1}-cS_{r-2}=0$，即 $S_{r+1}=aS_r-bS_{r-1}+cS_{r-2}$. 因为 a、b、c、S_r、S_{r-1}、S_{r-2} 均为实数，故 S_{r+1} 也是实数. 因此对一切正整数 r，有 $F_r=0$.

2.1.25 ★★ (1) 设函数 f，g 对所有 x 满足 $-\frac{\pi}{2}<f(x)\pm g(x)<\frac{\pi}{2}$，证明：对所有 x 有 $\cos(f(x))>\sin(g(x))$ 成立.

(2) 利用(1)或不利用(1)，证明：对所有 x 有 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$ 成立.

解析 (1) 不妨设 $g(x)>0$，由已知

$$-\frac{\pi}{2}+g(x)<f(x)<\frac{\pi}{2}-g(x). \qquad ①$$

若 $f(x)\geqslant 0$，则由①及 $\cos x$ 在第一象限递减得

$$\cos(f(x))>\cos\left(\frac{\pi}{2}-g(x)\right)=\sin(g(x)).$$

若 $f(x)<0$，则由①及 $\cos x$ 在第四象限递增得

$$\cos(f(x))>\cos\left(-\frac{\pi}{2}+g(x)\right)=\sin(g(x)).$$

(2) 取 $f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$，于是

$$|f(x)\pm g(x)|=|\cos x\pm\sin x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm x\right)\right|\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

由(1)得 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

2.1.26 ★★ $\sin(x^2)$是周期函数吗?

解析 设 $\sin x^2$ 为周期函数，周期为正数 p，则

$$\sin[(x+p)^2]=\sin(x^2)=\sin[(x-p)^2],$$

于是 $$0=\sin[(x+p)^2]-\sin[(x-p)^2]=2\cos(p^2+x^2)\sin 2px,$$

在 $x\neq\frac{n\pi}{2p}$，$\pm\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi-p^2}$ 时，上式不成立，因此 $\sin x^2$ 不是周期函数.

2.1.27 ★★ 求所有满足

$$\sin x+\cos y\equiv f(x)+f(y)+g(x)-g(y),\ x,\ y\in\mathbf{R}$$

的函数 $f(x)$与 $g(x)$ $(x\in\mathbf{R})$.

解析 在恒等式中，令 $x=y$ 得到 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}$. 于是

$$\sin x+\cos y\equiv\frac{\sin x+\cos x}{2}+\frac{\sin y+\cos y}{2}+g(x)-g(y).$$

再令 $y=0$ 得 $g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}+\frac{1}{2}+g(0)$，即 $g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}+c$.

不难验证 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}$，$g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}+c$（其中 c 为常数）满足要求.

2.1.28 ★★★ 设函数 $f(x)$对所有的实数 x 都满足 $f(x+2\pi)=f(x)$，求证：存在 4 个函数 $f_i(x)$ $(i=1,2,3,4)$满足：

(1) 对 $i=1, 2, 3, 4$，$f_i(x)$是偶函数，且对任意的实数 x，有 $f_i(x+\pi)=f_i(x)$；

(2) 对任意的实数 x，有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)\cos x+f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

解析 记 $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$，$h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，且 $g(x)$是偶函数，$h(x)$是奇函数，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$g(x+2\pi)=g(x)$，$h(x+2\pi)=h(x)$. 令

$$f_1(x)=\frac{g(x)+g(x+\pi)}{2},\ f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-g(x+\pi)}{2\cos x}, & x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)-h(x+\pi)}{2\sin x}, & x\neq k\pi,\\ 0, & x=k\pi,\end{cases}\ f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{h(x)+h(x+\pi)}{2\sin 2x}, & x\neq\dfrac{k\pi}{2},\\ 0, & x=\dfrac{k\pi}{2},\end{cases}$$

其中 k 为任意整数. 容易验证 $f_i(x)$，$i=1, 2, 3, 4$ 是偶函数，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_i(x+\pi)=f_i(x)$，$i=1, 2, 3, 4$. 下证对任意的$x\in\mathbf{R}$，有 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

当 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，显然成立；

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，因为 $f_1(x)+f_2(x)\cos x=f_1(x)=\dfrac{g(x)+g(x+\pi)}{2}$，而

$$\begin{aligned}g(x+\pi)&=g\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=g\left(k\pi+\frac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi\right)\\&=g\left(-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=g(x),\end{aligned}$$

故对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f_1(x)+f_2(x)\cos x=g(x)$.

下证对任意的 $x\in\mathbf{R}$，有 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=h(x)$.

当 $x\neq\dfrac{k\pi}{2}$ 时，显然成立；

当$x=k\pi$时，$h(x)=h(k\pi)=h(k\pi-2k\pi)=h(-k\pi)=-h(k\pi)$，所以$h(x)=h(k\pi)=0$，而此时 $f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x=0$，故

$$h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x;$$

当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，$h(x+\pi)=h\left(k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right)=h\left(k\pi+\dfrac{3\pi}{2}-2(k+1)\pi\right)=$

$h\left(-k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=-h\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-h(x)$，故 $f_3(x)\sin x=\frac{h(x)-h(x+\pi)}{2}=h(x)$，又 $f_4(x)\sin 2x=0$，从而有 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

于是，对任意的 $x\in\mathbf{R}$，我们有 $h(x)=f_3(x)\sin x+f_4(x)\sin 2x$.

综上所述，结论得证.

2.1.29 ★★ 关于 x 的不等式 $a^2+2a-\sin^2x-2a\cos x>2$ 的解集是全体实数. 求实数 a 的取值范围.

解析 设 $t=\cos x$，则函数 $f(t)=t^2-2at+a^2+2a-3$ 在 $t\in[-1,1]$ 上的最小值是正数.

(1) 当 $a\leqslant-1$ 时，函数 $f(t)$ 在 $t\in[-1,1]$ 上是增函数，最小值为 $f(-1)=a^2+4a-2>0$，解得 $a<-2-\sqrt{6}$.

(2) 当 $-1<a<1$ 时，函数 $f(t)$ 在 $t\in[-1,1]$ 上的最小值为 $f(a)=2a-3<0$.

(3) 当 $a\geqslant1$ 时，函数 $f(t)$ 在 $t\in[-1,1]$ 上是减函数，最小值为 $f(1)=a^2-2>0$，解得 $a>\sqrt{2}$.

因此，满足条件的 a 的取值范围为 $a<-2-\sqrt{6}$ 或 $a>\sqrt{2}$.

2.1.30 ★☆ 已知函数

$$f(x)=4\sin x\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\cos 2x.$$

(1) 设常数 $\omega>0$，若 $y=f(\omega x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，求 ω 的取值范围；

(2) 设集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}\right\}$，$B=\{x\mid |f(x)-m|<2\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 m 的取值范围.

解析 (1) $f(x)=4\sin x\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{2}+\cos 2x=2\sin x\cdot(1+\sin x)+1-2\sin^2x=2\sin x+1$.

因为 $f(\omega x)=2\sin\omega x+1$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]$ 上是增函数，所以

$$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}}{\omega},\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{\omega}\right]，其中 k\in\mathbf{Z},$$

即 $2k-\frac{1}{2}\leqslant-\frac{1}{2}\omega$, $2k+\frac{1}{2}\geqslant\frac{2}{3}\omega$, 即 $4k\leqslant1-\omega<1$, $4k\geqslant\frac{4}{3}\omega-1>-1$,从而, $k=0$. 故 $\omega\in\left(0,\ \frac{3}{4}\right]$.

(2) $m>\max f(x)-2=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-2=3-2=1$,

$$m<\min f(x)+2=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+2=2+2=4,$$

故 $m\in(1,\ 4)$.

2.1.31 ☆☆ 设 $M=\{f(x)\mid f(x)=a\cos x+b\sin x,\ a、b$ 为常数$\}$, F: 把平面上任意一点$(a,\ b)$映射为函数 $a\cos x+b\sin x$.

(1) 证明:不存在两个不同的点对应于同一个函数;

(2) 证明:当 $f_0(x)\in M$ 时, $f_1(x)=f_0(x+t)\in M$, t 为常数;

(3) 设 $f_0(x)\in M$ 时, $M_1=f_0(x+t)$, $t\in\mathbf{R}$,在映射 F 的作用下, M_1 作为像,求其原像,并说明它是什么图象?

解析 (1) 设有两个不同的点$(a,\ b)$、$(c,\ d)$对应同一个函数,即

$$F(a,\ b)=a\cos x+b\sin x,\ F(c,\ d)=c\cos x+d\sin x$$

是相同的,亦即 $a\cos x+b\sin x=c\cos x+d\sin x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立.

令 $x=0$, 有 $a=c$. 令 $x=\frac{\pi}{2}$, 有 $b=d$. 这与假设矛盾. 故不存在两个不同的点对应于同一个函数.

(2) 当 $f_0(x)\in M$ 时,可得常数 a_0、b_0,使 $f_0(x)=a_0\cos x+b_0\sin x$, 于是

$$\begin{aligned}f_1(x)&=f_0(x+t)=a_0\cos(x+t)+b_0\sin(x+t)\\&=(a_0\cos t+b_0\sin t)\cos x+(b_0\cos t-a_0\sin t)\sin x.\end{aligned}$$

由于 a_0、b_0、t 均为常数,则 $a_0\cos t+b_0\sin t=m$, $b_0\cos t-a_0\sin t=n$ 都为常数. 故 $f_1(x)=m\cos x+n\sin x\in M$.

(3) 设 $f_0(x)\in M$, 有 $f_0(x+t)=m\cos x+n\sin x$,其中 $m=a_0\cos t+b_0\sin t$, $n=b_0\cos t-a_0\sin t$.

在映射 F 下, $f_0(x+t)$ 的原像是$(m,\ n)$,则 M_1 的原像是

$$\{(m,\ n)\mid m=a_0\cos t+b_0\sin t,\ n=b_0\cos t-a_0\sin t,\ t\in\mathbf{R}\}.$$

其图象为 $m^2+n^2=a_0^2+b_0^2$.

2.1.32 ☆☆ 设 k 是一个不小于 3 的正整数, θ 是一个实数. 证明:如果 $\cos(k-1)\theta$ 和 $\cos k\theta$ 都是有理数,那么存在正整数 $n>k$, 使得 $\cos(n-1)\theta$ 和 $\cos n\theta$ 都是有

理数.

解析　首先,我们证明如下结论:设 α 是一个实数,如果 $\cos\alpha$ 是有理数,那么对任意正整数 m, $\cos m\alpha$ 是有理数.

对 m 用数学归纳法.由 $\cos\alpha$ 是有理数,得 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 也是有理数.设对一切 $m\leqslant l\ (l\geqslant 2)$, $\cos m\alpha$ 是有理数,则由 $\cos(l+1)\alpha=2\cos l\alpha\cdot\cos\alpha-\cos(l-1)\alpha$ 知 $\cos(l+1)\alpha$ 也是有理数,即当 $m=l+1$ 时命题也成立.由上述结论,对 $\alpha=k\theta$, $(k-1)\theta$, 分别令 $m=k$, $k+1$ 得到 $\cos k^2\theta$, $\cos(k^2-1)\theta$ 都是有理数,又 $k^2>k$, 从而命题得证.

2.2　三角方程与三角不等式

2.2.1 ★ 已知关于 x 的方程 $\sin^2 x-(2a+1)\cos x-a^2=0$ 有实数解.则实数 a 的取值集合是(　　).

(A) $\left[-\frac{5}{4},\ 1-\sqrt{2}\right]$　　(B) $\left[-\frac{5}{4},\ 1+\sqrt{2}\right]$

(C) $[1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}]$　　(D) $\left[-\frac{3}{2},\ 1-\sqrt{2}\right]$

解析　将方程变形为 $\cos^2 x+(2a+1)\cos x+a^2-1=0$.

令 $t=\cos x$, 则方程变形为

$$t^2+(2a+1)t+a^2-1=0.$$

设 $f(t)=t^2+(2a+1)t+a^2-1$, $t\in[-1,\ 1]$. 由题意知实数 a 应满足

$$\begin{cases}(2a+1)^2-4(a^2-1)\geqslant 0,\\ f(1)\geqslant 0,\\ f(-1)\geqslant 0,\\ -1\leqslant -\dfrac{2a+1}{2}\leqslant 1,\end{cases}$$

或 $f(1)f(-1)\leqslant 0$. 解得 $-\frac{5}{4}\leqslant a\leqslant 1+\sqrt{2}$.

所以,实数 a 的取值集合是 $\left[-\frac{5}{4},\ 1+\sqrt{2}\right]$, 故选 B.

2.2.2 ★ 使关于 x 的不等式 $\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}\geqslant k$ 有解的实数 k 的最大值是(　　).

(A) $-\frac{4}{3}$　　(B) $-\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{4}{3}$

解析　由于 $2+\cos x>0$, 原不等式可化为 $1+\sin x>k(2+\cos x)$, 即 $\sin x-k\cos x>2k-1$. 进而有 $\sqrt{1+k^2}\sin(x-\varphi)>2k-1$,解不等式 $-\sqrt{1+k^2}\leqslant 2k-$

$1\leqslant\sqrt{1+k^2}$，即得 k 的最大值为$\frac{4}{3}$，故选 D.

2.2.3 ★★ 已知 α、$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin^2\alpha=\cos(\alpha-\beta)$，则 α 与 β 一定满足(　　).

(A) $\alpha<\beta$　　(B) $\alpha>\beta$

(C) $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$　　(D) $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$

解析　由 $\sin^2\alpha=\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta>\sin\alpha\cdot\sin\beta$，得 $\sin\alpha>\sin\beta$. 故 $\alpha>\beta$.

又 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{3}{4}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$\frac{\pi}{3}-\beta>\frac{\pi}{6}$，即$\beta<\frac{\pi}{6}$，选项 D 不对. 当 α 接近$\frac{\pi}{2}$时，β 接近$\frac{\pi}{2}$，故选项 C 也不对. 故选 B.

2.2.4 ★★ 在$\triangle ABC$ 中，设 $x=\cos A+\cos B+\cos C$，$y=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$. 则 x、y 的大小关系是(　　).

(A) $x=y$　　(B) $x\geqslant y$

(C) $x\leqslant y$　　(D) 不能确定

解析　在$\triangle ABC$ 中，$\cos A+\cos B=2\cos\frac{\pi-C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\leqslant2\sin\frac{C}{2}$. 同理，$\cos B+\cos C\leqslant2\sin\frac{A}{2}$，$\cos C+\cos A\leqslant2\sin\frac{B}{2}$. 故 $x\leqslant y$. 故选 C.

2.2.5 ★★ 若 $x\in\left[-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{3}\right]$，则 $y=\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值是(　　).

(A) $\frac{12}{5}\sqrt{2}$　　(B) $\frac{11}{6}\sqrt{2}$　　(C) $\frac{11}{6}\sqrt{3}$　　(D) $\frac{12}{5}\sqrt{3}$

解析　先化 y 为同角三角函数的代数和，得

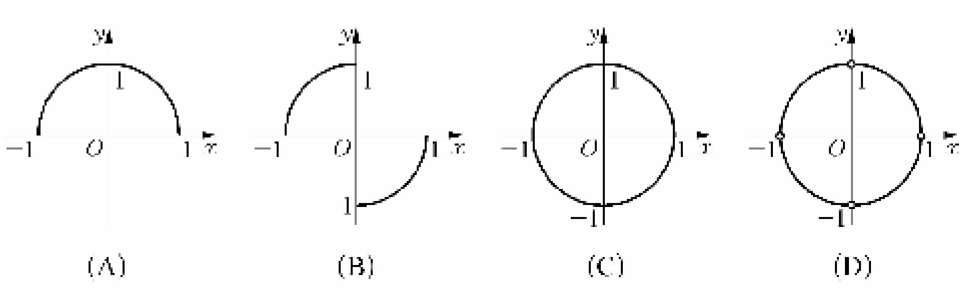
$$\begin{aligned}y&=-\cot\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cot\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-x-\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

令 $z=-x-\frac{\pi}{6}$，则 $z\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$，$2z=\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，且

$$y=\cot z+\tan z+\cos z=\frac{2}{\sin 2z}+\cos z,$$

显然 $\frac{2}{\sin 2z}$ 与 $\cos z$ 都是递减的，故 y 的最大值在 $z=\frac{\pi}{6}$ 时取到，即有 $y_{\max}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{4}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{11}{6}\sqrt{3}$. 故选 C.

2.2.6 ★ 方程 $\arcsin x+\arccos y=n\pi\ (n\in\mathbf{Z})$ 所表示的图形是(　　).



解析　由 $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\arccos y\in[0,\pi]$，知 $\arcsin x+\arccos y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. 所以 $n=0$ 或 1.

当 $n=0$ 时，$\arcsin x+\arccos y=0$，此式只能在 $x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$ 时成立. 又 $\sin(\arcsin x)=-\sin(\arccos y)$，即 $x^2+y^2=1$，其图象是单位圆在第二象限那一部分(包括端点).

当 $n=1$ 时，$\arcsin x=\pi-\arccos y$，此式只在 $x\geqslant 0$，$y\leqslant 0$ 时才成立，类似前面讨论可知其图形是单位圆在第四象限那部分(包括端点). 故选 B.

2.2.7 ★ 满足 $2\sin^2 x+\sin x-\sin 2x=3\cos x$ 的锐角 $x=$________.

解析　因 x 为锐角，则 $\cos x\neq 0$，方程两边同除以 $\cos x$ 得 $2\sin x\cdot\tan x+\tan x-2\sin x=3$，即 $(2\sin x+1)(\tan x-1)=2$.

因函数 $f(x)=(2\sin x+1)(\tan x-1)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调递增，且 $f(x)=2=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 $x=\frac{\pi}{3}$.

2.2.8 ★ 设 $[\tan x]$ 表示不超过实数 $\tan x$ 的最大整数. 则方程 $[\tan x]=2\cos^2 x$ 的解为________.

解析 因 $0\leqslant 2\cos^2 x\leqslant 2$，故$[\tan x]$可取的值只能是 0，1，2. 当$[\tan x]=0$时，$\cos x=0$，此时 $\tan x$ 无意义. 当$[\tan x]=2$时，$\cos^2 x=1$，此时 $\tan x=0$,这不可能. 当$[\tan x]=1$时，$\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，注意$[\tan x]=1$，所以只能有 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

2.2.9 ★ 使不等式 $\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围是________.

解析 当 $x=0$ 时，$a+a^2\geqslant 2$,所以 $a\leqslant -2$(因为 $a<0$). 又当 $a\leqslant -2$ 时,有

$$a^2+a\cos x\geqslant a^2+a\geqslant 2\geqslant \cos^2 x+\cos x=1+\cos x-\sin^2 x,$$

即 $\sin^2 x+a\cos x+a^2\geqslant 1+\cos x$. 从而知，$a$ 的取值范围是 $a\leqslant -2$.

评注 此不等式还有一个更一般的解法. 原不等式可化为

$$f(\cos x)=\cos^2 x+(1-a)\cos x-a^2\leqslant 0\ (a<0).$$

因 $a-1<0$，故 $f(\cos x)\leqslant 0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立的充要条件是 $f(1)\leqslant 0$，即 $1+(1-a)-a^2\leqslant 0$. 解得 $a\leqslant -2$(因 $a<0$).

2.2.10 ★★ 设 $0<\theta<\pi$,则 $\sin\dfrac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$ 的最大值是________.

解析 首先将原式中不同的角化为相同角：$\sin\dfrac{\theta}{2}(1+\cos\theta)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos^2\dfrac{\theta}{2}$. 直接求其最大值有困难,注意到正、余弦函数的平方和关系,将原式两边平方有

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^4\frac{\theta}{2}=2\cdot 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\leqslant 2\cdot\left(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{3}\right)^3$$

$=\dfrac{16}{27}$. 又当 $0<\theta<\pi$ 时,显然 $\sin\dfrac{\theta}{2}(1+\cos\theta)>0$，所以 $\sin\dfrac{\theta}{2}(1+\cos\theta)\leqslant\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$，等号当且仅当 $2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\cos^2\dfrac{\theta}{2}$，即 $\theta=2\operatorname{arccot}\sqrt{2}$ 时成立. 因此,所求最大值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$.

2.2.11 ★★ 已知 α、$\beta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$. 则 $\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)$ 的最大值为________.

解析 因为 $\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)=3\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$,由柯西不等式得

$$上式 \leqslant \sqrt{(3\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}\cdot\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta}=\sqrt{8\sin^2\alpha+1}\leqslant\sqrt{5},$$

在 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ 时，$\sin(\alpha-\beta)+2\sin(\alpha+\beta)$ 取最大值$\sqrt{5}$.

2.2.12 ★★ 已知 $x\in\mathbf{R}$. 则函数 $f(x)=\max\left\{\sin x,\cos x,\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right\}$ 的最大值与最小值的和等于________.

解析 注意到

$$\begin{aligned}f(x)&=\max\left\{\sin x,\cos x,\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right\}\\&=\max\left\{\sin x,\cos x,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\},\end{aligned}$$

显然，$f(x)$的最大值为 1. 可以通过作出 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的图象得到 $\max\{\sin x,\cos x\}$的最小值为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 时，达到最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 而在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 时，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为-1. 所以，$f(x)$的最小值为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故所求和为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.2.13 ★ 已知函数 $f(x)=4\pi\arcsin x-[\arccos(-x)]^2$ 的最大值为M，最小值为 m. 则 $M-m=$________.

解析 因为 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=4\pi\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)-(\pi-\arccos x)^2\\&=-(\arccos)^2-2\pi\arccos x+\pi^2\\&=-(\arccos x+\pi)^2+2\pi^2,\end{aligned}$$

所以 $f_{\max}(x)=\pi^2$，$f_{\min}(x)=-2\pi^2$. 故 $M-m=3\pi^2$.

2.2.14 ★★ 求所有的实数 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $(2-\sin 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$，并证明你的结论.

解析 令 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=t$，即 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}t$. 于是，$1+\sin 2x=2t^2$，即 $\sin 2x=2t^2-1$. 原方程化为 $t(3-2t^2)=1$，即

$$2t^3-3t+1=0. \quad ①$$

注意到 $t=1$ 是上述方程的解，故 $(t-1)(2t^2+2t-1)=0$.

由于 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以，$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant t\leqslant 1$. 于是，$2t^2+2t-1\geqslant 2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1>1$. 从而，方程 ① 有唯一解 $t=1$. 故原方程有唯一解 $x=\frac{\pi}{4}$.

2.2.15 ★★ 解方程：$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$. ①

解析 应用余弦函数的倍角公式对①式左边前两项进行降幂处理，可得

$$\cos 2x+\cos 4x+2\cos^2 3x=0. \qquad ②$$

我们发现，对②左边前两项和差化积后即可与第三项一起提取公因式 $2\cos 3x\cos x+2\cos^2 3x=0\Rightarrow\cos 3x(\cos x+\cos 3x)=0\Rightarrow\cos x\cos 2x\cos 3x=0$.

于是得原方程的三组解 $x_1=(2k+1)\frac{\pi}{2}$，$x_2=(2k+1)\frac{\pi}{4}$，$x_3=(2k+1)\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

2.2.16 ★★ 设 n 为正整数，求解方程：$\cos^n x-\sin^n x=1$.

解析 对正整数 n 分类讨论.

当 $n=1$ 时，原方程为 $\cos x-\sin x=1$，即 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$. 这样得到两组解 $x_1=2k\pi$，$x_2=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$；

当 n 为正偶数时，由于 $\cos^n x=1+\sin^n x\geqslant 1$，所以 $\sin^n x=0$，且 $\cos^n x=1$. 又得原方程的一组解 $x_3=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；

当 n 为大于 1 的奇数时，由 $\cos^n x=1+\sin^n x$ 知 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$，且 $-1\leqslant\sin x\leqslant 0$. 当 $\sin x=-1$ 时，$\cos x=0$，解得 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $\sin x=0$ 时，$\cos x=1$，解得 $x=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 当 $-1<\sin x<0$，且 $0<\cos x<1$ 时，由

$$\begin{aligned}1&=\cos^n x-\sin^n x=\cos^n(-x)+\sin^n(-x)\\&=|\cos^n(-x)+\sin^n(-x)|=|\cos^{n-2}(-x)\cos^2(-x)+\sin^{n-2}(-x)\sin^2(-x)|\\&\leqslant|\cos^{n-2}(-x)|\cdot\cos^2 x+|\sin^{n-2}(-x)|\cdot\sin^2 x<\cos^2 x+\sin^2 x=1\end{aligned}$$

知无解.

2.2.17 ★★ 解方程：$\cos\cos\cos\cos x=\sin\sin\sin\sin x$.

解析 此方程无解. 事实上，可以证明，对一切 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$\cos\cos\cos\cos x>\sin\sin\sin\sin x. \qquad ①$$

若 $x\in[\pi, 2\pi]$，则 $\cos\cos\cos\cos x>0$，$\sin\sin\sin\sin x\leqslant 0$，此时①式成立.

若 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $\cos x$, $\sin x$, $\cos\cos x$, $\sin\sin x$, $\cos\cos\cos x$, $\sin\sin\sin x$ 都属于闭区间$[0, 1]$. 又因为 $(\sin x+\cos x)^2\leqslant 2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2$, 所以 $\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$, 即 $0\leqslant\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin x$, 所以

$$\cos\cos x>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\sin\sin x, \qquad ②$$

$$\sin\cos x<\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)=\cos\sin x. \qquad ③$$

由 ②得 $\cos\cos\cos x<\cos\sin\sin x$. 于是有 $\cos\cos\cos x+\sin\sin\sin x<\cos(\sin\sin x)+\sin(\sin\sin x)<\frac{\pi}{2}$, 即 $\cos\cos\cos x<\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x$, 所以 $\cos\cos\cos\cos x>\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sin\sin\sin x\right)=\sin\sin\sin\sin x$. 此时①式成立.

若 $x\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则令 $y=x-\frac{\pi}{2}$, 从而 $y\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos\sin y\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 由②式可得

$$\cos\cos(\cos\sin y)>\sin\sin(\cos\sin y). \qquad ④$$

又由于函数 $f(t)=\sin\sin t$, $t\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$是增函数,因此由 ③ 式可得

$$\sin\sin(\cos\sin y)>\sin\sin(\sin\cos y), \qquad ⑤$$

由 ④ 和 ⑤ 得 $\cos\cos\cos\sin y>\sin\sin\sin\cos y$, 即

$$\cos\cos\cos\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)>\sin\sin\sin\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

故得 $\cos\cos\cos\cos x>\sin\sin\sin\sin x$. 此时①式也成立.

综上所述,当 $x\in[0, 2\pi]$时,①式都成立. 再由周期性可知,对一切 $x\in\mathbf{R}$,①式都成立. 故原方程无解.

评注 上述解答反复应用了不等式 $\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$, 这个不等式的证明可以更直接: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$.

2.2.18 ★★ 解方程组: $\begin{cases}\cos x=2\cos^3 y,\\ \sin x=2\sin^3 y.\end{cases}$

解析 两方程平方后相加,得

$$
\begin{aligned}
1 &= 4(\cos^6 y + \sin^6 y) = 4(\cos^4 y - \cos^2 y \sin^2 y + \sin^4 y) \\
&= 4(1 - 3\sin^2 y \cos^2 y) = 4 - 3\sin^2 2y.
\end{aligned}
$$

所以 $\sin 2y = \pm 1$，$y = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$，代入原方程组得 $x = 2l\pi + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ $(l,\ k \in \mathbf{Z})$. 所以方程组的解为

$$
\begin{cases}
x = 2l\pi + \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}, \\
y = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}.
\end{cases}
\quad (l,\ k \in \mathbf{Z})
$$

2.2.19 ★★ 两个锐角 α 和 β 满足方程 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$，证明 $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$.

解析 由已知得 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$，即

$$\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta). \qquad ①$$

如果 $\sin\alpha > \cos\beta$，那么由①得 $\cos\alpha > \sin\beta$，将这两个不等式两端分别平方，再相加得 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha > \cos^2\beta + \sin^2\beta$，即 $1 > 1$，矛盾.

同样地，如果 $\sin\alpha < \cos\beta$，那么由①得 $\cos\alpha < \sin\beta$，从而有 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha < \cos^2\beta + \sin^2\beta$，矛盾.

因此，我们有 $\sin\alpha = \cos\beta$，即 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\beta$，故 $\frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$，即 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

2.2.20 ★★ 设实数 a，b，c，x 满足

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0. \qquad ①$$

试用 a，b，c 给出一个 $\cos 2x$ 满足的二次方程. 在 $a=4$，$b=2$，$c=-1$ 的情况下比较这两个方程.

解析 因为 $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$，将方程①变形为 $a\cos^2 x + c = -b\cos x$，两边平方是自然的：$a^2\cos^4 x + 2ac\cos^2 x + c^2 = b^2\cos^2 x$，即 $a^2\cos^4 x + (2ac - b^2)\cos^2 x + c^2 = 0$. $a^2\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)^2 + (2ac - b^2)\frac{\cos 2x + 1}{2} + c^2 = 0$，整理得

$$a^2\cos^2 2x + 2(a^2 + 2ac - b^2)\cos 2x + (a + 2c)^2 - 2b^2 = 0. \qquad ②$$

当 $a=4$，$b=2$，$c=-1$ 时，方程①、②分别为

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0, \qquad ③$$

$$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0. \qquad ④$$

它们的系数相同. 这时方程 ③ 的解为 $\cos x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，即有 $x_1=k\cdot 360°\pm 72°$，$x_2=k\cdot 360°\pm 144°$，其中 k 为整数. 对于

$$2x_1=2k\cdot 360°\pm 144°,\ 2x_2=2k\cdot 360°\pm 288°$$

有 $\cos 2x_1=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{4}$，$\cos 2x_2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. 它们显然满足方程④.

2.2.21 ★★ 试问要使下列方程组

$$\begin{cases}\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n=0, & ①\\ \sin x_1+2\sin x_2+\cdots+n\sin x_n=100 & ②\end{cases}$$

有解，n 的最小值是多少?

解析 如果 $n<20$，那么我们用方程②减去方程①的十倍，得

$$\begin{aligned}&-9\sin x_1-8\sin x_2-\cdots-\sin x_9+\sin x_{11}\\&\quad+2\sin x_{12}+\cdots+(n-10)\sin x_n=100.\end{aligned}\qquad ③$$

③式左端的绝对值不大于 $(9+8+\cdots+1)\times 2=90$，因此③式不可能成立. 故原方程组当 $n<20$ 时无解.

当 $n=20$ 时，我们可取 x_1，x_2，…，x_{20} 使

$$\sin x_i=-1\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10);\ \sin x_j=1\ (j=11,\ 12,\ \cdots,\ 20).$$

这样取得的 x_1，x_2，…，x_{20} 显然是 $n=20$ 时原方程组的解.

故要使原方程组有解，n 的最小值是 20.

2.2.22 ★★ 设 a，b 是实数使得不等式 $a\cos x+b\cos 3x>1$ 无解. 求证：$|b|\leqslant 1$.

解析 用反证法. 设 $|b|>1$，取 $x_1=\dfrac{1}{3}\arccos\dfrac{1}{b}$，$x_2=\dfrac{2}{3}\pi+x_1$. 由于 $a\cos x+b\cos 3x>1$ 无解，所以 $a\cos x_1\leqslant 0$，$a\cos x_2\leqslant 0$. 又 $0<x_1<\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}<x_2<\pi$，从而 $\cos x_1>0$，$\cos x_2<0$. 由此即得 $a=0$. 此时原不等式化为 $b\cos 3x>1$. 显然当 $|b|>1$ 时，此不等式有解，引出矛盾！于是 $|b|\leqslant 1$.

2.2.23 ★★ 求所有的实数 α 使得 $\cos\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\cos 4\alpha$，…，$\cos 2^n\alpha$，… 都是负数.

解析 设 α 满足题意要求，则由 $\cos 4\alpha<0$ 和 $\cos 2\alpha<0$ 可得 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos 2\alpha<0$. 结合 $\cos\alpha<0$ 可知 $\cos\alpha<-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}<-\dfrac{1}{4}$. 由此立即可得 $\cos 2^n\alpha<-\dfrac{1}{4}$，$n=$

0，1，2，…，所以有 $\left|\cos 2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{4}$，$n=0$，1，2，…

由于 $$\begin{aligned}\left|\cos 2^{n+1}\alpha+\frac{1}{2}\right| &= 2\left|\cos^2 2^n\alpha-\frac{1}{4}\right|\\ &= 2\left|\cos 2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\\ &\geqslant\frac{3}{2}\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|,\end{aligned}$$

所以 $\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$，$n=1$，2，3，…

于是 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$ 即 $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 另一方面当 $\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，显然 $\cos 2^n\alpha=-\frac{1}{2}$，$n=0$，1，2，…

2.2.24 ★★ 求实数 a 的取值范围，使得不等式 $\sin^6 x+\cos^6 x+2a\sin x\cos x\geqslant 0$ 对所有实数 x 成立.

解析 记 $f(x)=\sin^6 x+\cos^6 x+2a\sin x\cos x$. 由于

$$\begin{aligned}1 &= (\sin^2 x+\cos^2 x)^3\\ &= \sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x\\ &= \sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x\\ &= \sin^6 x+\cos^6 x+\frac{3}{4}\cdot\sin^2 2x,\end{aligned}$$

所以 $f(x)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x+a\sin 2x$. 如果 $|a|\leqslant\frac{1}{4}$，则

$$f(x)\geqslant 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x-|a|\,|\sin 2x|\geqslant 1-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=0$$

对所有实数 x 成立. 反之，若 $|a|>\frac{1}{4}$，取实数 x_0，使得 $a\sin 2x_0=-|a|$，于是 $|\sin 2x_0|=1$，且 $f(x_0)=1-\frac{3}{4}-|a|<0$. 这说明，所求 a 的取值范围是 $-\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant\frac{1}{4}$.

2.2.25 ★☆ 求实数 a 的取值范围，使得对任意实数 x 和任意 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}.$$

解析 显然,原题即关于 x 的二次不等式 $x^2+(3+2\sin\theta\cos\theta+a\sin\theta+a\cos\theta)x+\frac{1}{2}(3+2\sin\theta\cos\theta)^2+\frac{1}{2}(a\sin\theta+a\cos\theta)^2-\frac{1}{16}\geqslant 0$ 恒成立,故对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,恒有判别式 $\Delta\leqslant 0$. 即 $(3+2\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta-a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{4}$ 对 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立. 由此得对一切 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 有

$$a\geqslant\frac{3+2\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}\cdots①,\ 或\ a\leqslant\frac{3+2\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{2}}{\sin\theta+\cos\theta}\cdots②.$$

因为 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $1\leqslant\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant\sqrt{2}$.

由 ① 有 $a\geqslant\sin\theta+\cos\theta+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$. 易知,当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$ 时, $f(x)=x+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x}$ 为减函数. 从而, $\max\limits_{\left(\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)}\left(\sin\theta+\cos\theta+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)=\max\limits_{1\leqslant x\leqslant\sqrt{2}}f(x)=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$. 由此可得 $a\geqslant\frac{7}{2}$.

由 ② 有 $a\leqslant\sin\theta+\cos\theta+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$. 而 $\sin\theta+\cos\theta+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\geqslant 2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$, 且当 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时等号成立,从而得 $a\leqslant\sqrt{6}$.

综上可知 $a\geqslant\frac{7}{2}$ 或 $a\leqslant\sqrt{6}$ 为所求.

2.2.26 ☆☆ 对于固定的 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,求满足以下两条件的最小正数 a:

(i) $\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}+\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta}>1$;

(ii) 存在 $x\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$, 使得 $\left[(1-x)\sin\theta-\sqrt{a-x^2\cos^2\theta}\right]^2+\left[x\cos\theta-\sqrt{a-(1-x)^2\sin^2\theta}\right]^2\leqslant a$.

解析 由(i)得 $\sqrt{a}>\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$. ①

(ii)等价于:存在 $x\in\left[1-\frac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$, 满足

$$2\sin\theta\cos\theta\left[(1-x)\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-x^2}+x\sqrt{\frac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}\right]\geqslant a. \qquad ②$$

先证引理：设 $0<p<1$，$0<q<1$，$p+q>1$，$p^2+q^2\leqslant 1$，$f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ $(1-q\leqslant x\leqslant p)$. 则当 $\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$ 时，即 $x=\dfrac{p^2-q^2+1}{2}\in[1-q,\ p]$ 时，$f(x)$达到最大值.

由于 $1-q\leqslant x\leqslant p$，可令 $x=p\sin\alpha$，$1-x=q\sin\beta$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\alpha+\beta<\pi$. 于是 $f(x)=pq(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)=pq\sin(\alpha+\beta)$. 而 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{p^2-x^2}\cdot\sqrt{q^2-(1-x)^2}-x(1-x)}{pq}=\dfrac{p^2+q^2-1-(\sqrt{p^2-x^2}-\sqrt{q^2-(1-x)^2})^2}{2pq}\leqslant 0$，从而$\dfrac{\pi}{2}\leqslant\alpha+\beta<\pi$. 同时，当且仅当$\sqrt{p^2-x^2}=\sqrt{q^2-(1-x)^2}$时，即 $x=\dfrac{1}{2}(p^2-q^2+1)\in[1-q,\ p]$ 时，$\cos(\alpha+\beta)$ 达到最大值 $\dfrac{p^2+q^2-1}{2pq}\leqslant 0$. 因为在$\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$上正弦函数单调递减，所以 $f(x)=pq\sin(\alpha+\beta)$ 也当且仅当 $x=\dfrac{1}{2}(p^2-q^2+1)$ 时达到最大值. 引理得证.

由引理知，在 $\dfrac{a}{\sin^2\theta}+\dfrac{a}{\cos^2\theta}\leqslant 1$ 时，当且仅当$\sqrt{\dfrac{a}{\cos^2\theta}-x^2}=\sqrt{\dfrac{a}{\sin^2\theta}-(1-x)^2}$，即 $x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\cos^2\theta}-\dfrac{a}{\sin^2\theta}+1\right)\in\left[1-\dfrac{\sqrt{a}}{\sin\theta},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\right]$时，达到最大值 $2\sin\theta\cos\theta\sqrt{\dfrac{a}{\cos^2\theta}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{\cos^2\theta}-\dfrac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2}$.

由②知，所求的最小的 a 是满足下式且满足①的最小的 a：

$$2\sin\theta\cos\theta\sqrt{\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{\cos^2\theta}-\frac{a}{\sin^2\theta}+1\right)^2}\geqslant a,$$

即 $(1-3\sin^2\theta\cos^2\theta)a^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta a+\sin^4\theta\cos^4\theta\leqslant 0$. 解得

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}\leqslant a\leqslant\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}.$$

由于 $\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}<\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$，所以 $\dfrac{a}{\cos^2\theta}+\dfrac{a}{\sin^2\theta}=\dfrac{a}{\cos^2\theta\cos^2\theta}=$

$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}<1$. 因此,当 $a=\dfrac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$ 时,满足①,故此即为所求.

评注 上述解析有两点值得注意:1. 所要解决的问题结构复杂,转而先证更一般的情况——引理;2. 注意到 $\sin(\alpha+\beta)$ 与 $\cos(\alpha+\beta)$ 在 $\alpha+\beta\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 有相同单调性,从而通过求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的最大值来求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的最大值.

2.2.27 ★★ 设 a, b, A, B 为已知实数. 已知 $f(\theta)=1-a\cos\theta-b\sin\theta-A\sin2\theta-B\sin2\theta$ 对于一切实数 θ,恒有 $f(\theta)\geqslant0$. 证明:$a^2+b^2\leqslant2$, $A^2+B^2\leqslant1$.

解析 因 $f(\theta)\geqslant0$ 对一切实数 θ 成立,故 $f(\theta)+f(\pi+\theta)\geqslant0$, 即

$$\begin{aligned}f(\theta)+f(\pi+\theta)&=2-2A\sin2\theta-2B\sin2\theta\\&=2-2\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\varphi)\geqslant0,\end{aligned}$$

其中 φ 的值由 $\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$确定. 因此,对一切实数 θ,不等式 $\sqrt{A^2+B^2}\cos(2\theta-\varphi)\leqslant1$ 成立. 令 $\theta=\dfrac{\varphi}{2}$, 得 $\sqrt{A^2+B^2}\leqslant1$. 这就证明了 $A^2+B^2\leqslant1$.

如法炮制,我们来证明 $a^2+b^2\leqslant2$. 由

$$\begin{aligned}f(\theta)+f\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)&=2-a(\cos\theta-\sin\theta)-b(\sin\theta+\cos\theta)\\&=2-\sqrt{2}a\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}b\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\&=2-\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\geqslant0,\end{aligned}$$

得 $\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)\leqslant\sqrt{2}$, 其中 φ 由 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 确定. 令 $x=\varphi-\dfrac{\pi}{4}$, 得 $\sqrt{a^2+b^2}\leqslant\sqrt{2}$, 即 $a^2+b^2\leqslant2$.

2.2.28 ★★ 设 $g(\theta)=\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\cos2\theta+\cdots+\lambda_n\cos n\theta$, 其中 λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, θ 均为实数. 若对一切实数 θ,恒有 $g(\theta)\geqslant-1$. 求证:$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\leqslant n$.

解析 令 $\theta_k=\dfrac{2k\pi}{n+1}$, $k=0$, 1, 2, $\cdots$, n,则有

$$\sum_{k=0}^{n}\cos m\theta_k=\sum_{k=0}^{n}\sin m\theta_k=0,\ m=1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

事实上，$\sum\limits_{k=0}^{n} e^{im\theta_k}=\dfrac{1-e^{im\cdot 2\pi}}{1-e^{im\frac{2\pi}{n+1}}}=0$，于是①式成立.因此

$$\begin{aligned}&g(0)+g(\theta_1)+g(\theta_2)+\cdots+g(\theta_n)\\=&\lambda_1(\cos 0+\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_n)+\lambda_2(\cos 0+\cos 2\theta_1+\cdots\\&+\cos 2\theta_n)+\cdots+\lambda_n(\cos 0+\cos n\theta_1+\cdots+\cos n\theta_n)=0,\end{aligned}$$

故由 $g(\theta_1)\geqslant -1$，$g(\theta_2)\geqslant -1$，$\cdots$，$g(\theta_n)\geqslant -1$ 得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=g(0)=-[g(\theta_1)+g(\theta_2)+\cdots+g(\theta_n)]\leqslant n.$$

2.2.29 ★★ 设对于任意实数 x 都有 $\cos(a\sin x)>\sin(b\cos x)$，求证：$a^2+b^2<\dfrac{\pi^2}{4}$.

解析 用反证法，设 $a^2+b^2\geqslant\dfrac{\pi^2}{4}$. 由于 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，其中 φ 取为仅依赖于 a，b 的固定实数，使得 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 由于 $\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，从而存在实数 x_0，使得 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x_0+\varphi)=\dfrac{\pi}{2}$，即 $a\sin x_0+b\cos x_0=\dfrac{\pi}{2}$. 由此可得 $\cos(a\sin x_0)=\sin(b\cos x_0)$，与假设矛盾！于是 $a^2+b^2<\dfrac{\pi^2}{4}$.

2.2.30 ★★ 对任意实数 θ，求证：$5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta\geqslant 0$.

解析 $5+8\cos\theta+4\cos 2\theta+\cos 3\theta=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta=1+\cos\theta+4\cos\theta(1+\cos\theta)^2=(1+\cos\theta)(2\cos\theta+1)^2\geqslant 0$.

2.2.31 ★★ 设 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 9$，并问 α，β 取什么值时等号成立.

解析 由于 $\dfrac{1}{\sin^2\beta\cos^2\beta}\geqslant 4$，当且仅当 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 时等号成立.由均值不等式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}&\geqslant\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha+4\csc^2\alpha=5+\tan^2\alpha+4\cot^2\alpha\\&\geqslant 5+2\cdot\tan\alpha\cdot 2\cot\alpha=9.\end{aligned}$$

当且仅当 $\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$\alpha=\arctan\sqrt{2}$ 时等号成立.

2.2.32 ★★★ 已知 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1$，其中 A，B，C 都是锐角，试证：

$$\frac{\pi}{2}\leqslant A+B+C\leqslant\pi.$$

解析 由题设 $\sin^2 A=1-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-\sin^2 C=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)-\sin C\right]\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+\sin C\right]=2\cos\left[\frac{\pi}{4}-(B-C)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{4}-(B+C)\right]\cdot 2\sin\left[\frac{\pi}{4}-(B-C)\right]\cdot\cos\left[\frac{\pi}{4}-(B+C)\right]=\cos(B+C)\cos(B-C)$. ①

因为 B 和 C 都是锐角，故 $\cos(B-C)>0$，从而 $\cos(B+C)\geqslant 0$，即 $B+C$ 也是锐角，因此 $A+B+C\leqslant\pi$. 又因为 B，C 是锐角，故有 $\cos(B-C)\geqslant\cos(B+C)$，即

$$\sin^2 A=\cos(B+C)\cos(B-C)\geqslant\cos^2(B+C)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-B-C\right).$$

由于 A 与 $B+C$ 都是锐角，从而有 $A\geqslant\frac{\pi}{2}-B-C$，即 $A+B+C\geqslant\frac{\pi}{2}$.

评注 等式①还可以用另外的方式得到：

$$\begin{aligned}\sin^2 A&=1-\sin^2 B-\sin^2 C=\cos^2 B-\sin^2 C\\&=\cos^2 B-\sin^2 C\cos^2 B+\sin^2 C\cos^2 B-\sin^2 C\\&=\cos^2 B\cos^2 C-\sin^2 C\sin^2 B\\&=(\cos B\cos C-\sin C\sin B)(\cos B\cos C+\sin C\sin B)\\&=\cos(B+C)\cos(B-C).\end{aligned}$$

2.2.33 ★★ 设 α，β，γ 是一个三角形的三个内角. 求证：

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\leqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$$

解析 不妨设 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，由于 α，β，γ 是一个三角形的三个内角，易知 $\sin\alpha\leqslant\sin\beta\leqslant\sin\gamma$. 由排序不等式可得

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\beta}+\frac{\sin\beta}{\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\alpha},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\gamma}+\frac{\sin\beta}{\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\beta}.$$

两不等式相加即得求证的不等式.

2.2.34 ★★ α,β,γ是一个给定三角形的三个内角.求证：$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 12$. 并求等号成立的条件.

解析 由算术-几何平均不等式,有

$$\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}\geqslant 3\left(\csc\frac{\alpha}{2}\cdot\csc\frac{\beta}{2}\cdot\csc\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

等号当且仅当$\alpha=\beta=\gamma$时成立.

再由算术-几何平均不等式及凸函数的性质,有

$$\begin{aligned}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{1}{3}}&\leqslant\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\\&\leqslant\sin\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\csc^2\frac{\alpha}{2}+\csc^2\frac{\beta}{2}+\csc^2\frac{\gamma}{2}&\geqslant 3\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}\\&\geqslant 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=12.\end{aligned}$$

并且等号当且仅当$\alpha=\beta=\gamma$时成立.

2.2.35 ★★★ 设A,B,C是三角形的三个内角,求证：$-2<\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$,并确定其中的等号何时成立.

解析 不妨设$A\geqslant 60^\circ$,则$B+C=180^\circ-A\leqslant 120^\circ$,从而$0^\circ\leqslant\frac{3}{2}|B-C|<\frac{3}{2}(B+C)\leqslant 180^\circ$. 由此可得$\cos\frac{3}{2}(B-C)>\cos\frac{3}{2}(B+C)$. 再由$\sin\frac{3}{2}(B+C)\geqslant 0$,得到

$$2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C)\geqslant 2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B+C),$$

即$\sin 3B+\sin 3C\geqslant\sin 3(B+C)$. 于是

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\geqslant\sin 3A+\sin 3(B+C)\geqslant -2.$$

为使$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-2$,必须满足

$$\sin 3A=-1,\ \sin 3(B+C)=-1,\ \sin\frac{3}{2}(B+C)=0,$$

但这是不可能的，从而 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C>-2$.

另一方面，由 $A\geqslant 60^\circ$ 可知

$$\begin{aligned}\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C&=\sin 3A+2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C)\\&\leqslant\sin 3A+2\sin\frac{3}{2}(B+C).\end{aligned}$$

记 $\alpha=\frac{3}{2}(B+C)$，则 $0^\circ<\alpha\leqslant 180^\circ$，且 $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-\frac{2}{3}\alpha$. 于是

$$\begin{aligned}&\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\sin(3\times 180^\circ-2\alpha)+2\sin\alpha\\&=\sin 2\alpha+2\sin\alpha=2\sin\alpha(1+\cos\alpha)=8\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

又由均值不等式可得

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}&=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^6\frac{\alpha}{2}}\\&\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}\left[\frac{3\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4}\right]^4}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{16},\end{aligned}$$

所以 $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 从以上过程可知，当且仅当 $3\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{3}{2}(B-C)=1$，即 $A=140^\circ$，$B=C=20^\circ$ 时，等号成立.

2.2.36 ★★ 试证若两个三角形有一个角相等，则其余两个角的正弦之和较大的三角形，它的这两个角之差较小. 用所得结果确定：在什么三角形中，其角的正弦之和达到最大值？

解析 设 α, β, γ 和 α', β', γ' 分别是两个三角形的内角，且 $\alpha=\alpha'$，若

$$\sin\beta+\sin\gamma<\sin\beta'+\sin\gamma',\qquad ①$$

则

$$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}.\qquad ②$$

因为 $\alpha=\alpha'$，故 $\beta+\gamma=\beta'+\gamma'$，且 $\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\beta'+\gamma'}{2}>0$，所以不等式②等价于

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<\cos\frac{\beta'-\gamma'}{2}. \qquad ③$$

从而有 $|\beta-\gamma|>|\beta'-\gamma'|$，这就证明了本题的第一部分.

若在某一个三角形中，至少有两个角是不同的，设为 β 和 γ，则可以作一个新三角形，使得其角的正弦之和比原来的三角形的正弦之和大. 这只要根据前面所证明的，使新三角形的角 α' 和原三角形的角 α 相等，而使 β' 和 γ' 的每一个更接近于 $\frac{\beta+\gamma}{2}$ 就行了.

因此，当三角形是等边三角形时，正弦之和达到最大值.

评注 本题实际上是对"局部调整法"的一个具体直观的解释.

2.2.37 ★★ x 为一实数，$0<x<\pi$，证明：对于所有的自然数 n

$$\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

的值为正数.

解析 令 $f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots+\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$，利用 $2\sin x\sin(2k-1)x=\cos(2k-2)x-\cos 2kx$，得

$$\begin{aligned}2f(x)\sin x&=1-\cos 2x+\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3}+\frac{\cos 4x-\cos 6x}{5}+\cdots\\&\quad+\frac{\cos(2n-2)x-\cos 2nx}{2n-1}\\&=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\cos 6x-\cdots\\&\quad-\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\cos(2n-2)-\frac{\cos 2nx}{2n-1}\\&\geqslant 1-\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2n-1}\right]\\&=0.\end{aligned}$$

如果等号成立，则有 $\cos 2kx=1$ $(k=1,2,\cdots,n)$，但因 $0<x<\pi$，故 $\cos 2x\neq 1$. 于是得 $f(x)\sin x>0$. 又因 $\sin x>0$，所以 $f(x)>0$.

评注 在这里"裂项"将 $2\sin x\sin(2k-1)x$ 表示成 $\cos(2k-2)x-\cos 2kx$ 是一

个关键的动作，虽然“裂项”后不能做到前后项完全抵消，但却给我们提供了按照 $\cos 2kx$ ($k\in\mathbf{N}$)重新组合项的机会，进一步利用 $\cos 2kx$ 的有界性便达到证明的目的.

2.2.38 ☆☆ 设 $k>10$. 证明：可以在式 $f(x)=\cos x\cos 2x\cos 3x\cdots\cos 2^k x$ 中，将一个 cos 换为 sin，使得所得到的 $f_1(x)$，对一切实数 x，都有 $|f_1(x)|\leqslant\dfrac{3}{2^{k+1}}$.

解析 我们证明：用 $\sin 3x$ 替换 $\cos 3x$ 即可.

由于 $|\sin 3x|=|3\sin x-4\sin^3 x|=|3-4\sin^2 x|\cdot|\sin x|\leqslant 3|\sin x|$，那么，对于 $f(x)$中将 $\cos 3x$ 换为 $\sin 3x$ 后所得到的 $f_1(x)$，我们有

$$\begin{aligned}|f_1(x)|&\leqslant 3|\sin x|\cdot|\cos x|\cdot|\cos 2x|\cdot|\cos 4x|\cdot|\cos 8x|\cdots|\cos 2^k x|\\&=3|\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cdots\cos 2^k x|\\&=3\cdot 2^{-k-1}\cdot|\sin 2^{k+1}x|\leqslant\frac{3}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

2.2.39 ☆☆ 设 α, β 是实数，且 $\cos\alpha\neq\cos\beta$, k 是大于 1 的正整数. 求证：

$$\left|\frac{\cos k\beta\cos\alpha-\cos k\alpha\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}\right|<k^2-1.$$

解析 令 $x=\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$，$y=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$，则

$$\begin{aligned}&\cos k\beta\cos\alpha-\cos k\alpha\cos\beta\\&=\frac{1}{2}[\cos(k\beta+\alpha)+\cos(k\beta-\alpha)-\cos(k\alpha+\beta)-\cos(k\alpha-\beta)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(k\beta+\alpha)-\cos(k\alpha+\beta)]+\frac{1}{2}[\cos(k\beta-\alpha)-\cos(k\alpha-\beta)]\\&=\sin(k-1)x\sin(k+1)y+\sin(k+1)x\sin(k-1)y,\end{aligned}$$

并且 $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin x\sin y$，从而

$$\left|\frac{\cos k\beta\cos\alpha-\cos k\alpha\cos\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k-1)x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(k+1)y}{\sin y}\right|+\frac{1}{2}\left|\frac{\sin(k+1)x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(k-1)y}{\sin y}\right|.$$

由此可知只需再证：对任何 $n\in\mathbf{N}$ 和实数 r 有

$$|\sin n\gamma|\leqslant n|\sin\gamma|, \qquad ①$$

且等号仅在 $n=1$ 或者 $\sin\gamma=0$ 时成立. 事实上，不妨设 $n>1$，$\sin\gamma\neq 0$，从而 $|\cos\gamma|<1$. 当 $n=2$ 时，$|\sin 2\gamma|=|2\sin\gamma\cos\gamma|<2|\sin\gamma|$，即①式中严格不

等号成立.

设①式对于 $n=m\geqslant 2$ 成立，当 $n=m+1$ 时，

$$\begin{aligned}|\sin(m+1)\gamma| &\leqslant |\sin m\gamma\cos\gamma|+|\sin\gamma\cos m\gamma|\\&<|\sin m\gamma|+|\sin\gamma|<(m+1)|\sin\gamma|,\end{aligned}$$

即①中的严格不等号对于 $n=m+1$ 也成立.这样就完成了对于①式的归纳证明，且证明了只当 $n=1$ 或者 $\sin\gamma=0$ 时，①中的等号才能成立.

2.2.40 ☆☆ 求证：对于每个自然数 n，不等式

$$|\sin 1|+|\sin 2|+\cdots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8}{5}n$$

成立.

解析 令 $f(x)=|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|$，我们只需证明对任何实数 x 有

$$f(x)>\frac{8}{5}. \tag{①}$$

由于 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数，所以只需对于 $x\in[0,\pi]$ 证明①成立.

当 $0\leqslant x\leqslant\pi-2$ 时，$f(x)=\sin x+\sin(x+1)+\sin(x+2)$. 由于 $1\leqslant x+1$ 且 $1\leqslant\pi-(x+1)$，所以 $\sin(x+1)\geqslant\sin 1$. 又 $\sin x+\sin(x+2)=2\sin(x+1)\cos 1>\sin(x+1)\geqslant\sin 1$，从而 $f(x)>2\sin 1$.

当 $\pi-2<x\leqslant\pi-1$ 时，$f(x)=\sin x+\sin(x+1)-\sin(x+2)$. 显然 $\sin x\geqslant\sin 1$. 由 $\sin(x+1)-\sin(x+2)=-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{3}{2}\right)$，以及 $\pi-\frac{1}{2}<x+\frac{3}{2}\leqslant\pi+\frac{1}{2}$，可得 $\sin(x+1)-\sin(x+2)\geqslant 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}=\sin 1$. 所以 $f(x)\geqslant 2\sin 1$.

当 $\pi-1<x\leqslant\pi$ 时，$f(x)=\sin x+\sin(x+1)-\sin(x+2)$. 因为 $\pi+1<x+2\leqslant\pi+2$，所以 $-\sin(x+2)>\sin 1$. 又 $\sin x-\sin(x+1)=-2\sin\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 以及 $\pi-\frac{1}{2}<x+\frac{1}{2}\leqslant\pi+\frac{1}{2}$，从而 $\sin x-\sin(x+1)\geqslant 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}=\sin 1$. 于是 $f(x)>2\sin 1$.

这就证明了对任何实数 x 有 $f(x)\geqslant 2\sin 1$. 又 $\sin 1>\sin 54=\frac{1+\sqrt{5}}{4}>\frac{4}{5}$，所以对任意实数 x 有①式成立.

2.2.41 ☆☆ 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 a_1，a_2，$\cdots$，a_n

是实数，n 是正整数. 如果对所有实数 x 有 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$，

求证：$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

解析 令 $M = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. 对于正整数 k $(1 \leqslant k \leqslant n)$，由于 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{\sin x} = k$，所以任给 $\varepsilon > 0$，存在实数 x，使 $\sin x \neq 0$，且 $\left|\dfrac{\sin kx}{\sin x} - k\right| < \dfrac{\varepsilon}{M}$，$k = 1, 2, \cdots, n$. 由此可得

$$
\begin{aligned}
1 &\geqslant \left|\frac{f(x)}{\sin x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \sin kx}{\sin x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin kx}{\sin x} - k\right)a_k\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} ka_k\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\sin kx}{\sin x} - k\right| |a_k| \geqslant \left|\sum_{k=1}^{n} ka_k\right| - \varepsilon,
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性可知所求证的不等式成立.

评注 由于极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{\sin x}$ 的存在性，我们由极限定义可以得到一个与之等价的不等式：对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $x \in \mathbf{R}$，使 $\left|\dfrac{\sin kx}{\sin x} - k\right| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ $(\sin x \neq 0)$. 而这正是后面证明的关键工具.

2.2.42 ★★ 设 n、m 都是正整数，并且 $n > m$. 证明：对一切 $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，都有

$$2|\sin^n x - \cos^n x| \leqslant 3|\sin^m x - \cos^m x|.$$

解析一 只需对 $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ 进行证明$\Bigl($当 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 时，不等式显然成立；当 $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时，可通过令 $y = \dfrac{\pi}{2} - x$ 得到$\Bigr)$. 当 $k \geqslant 2$ 时，有

$$
\begin{aligned}
\cos^k x - \sin^k x &= (\cos^k x - \sin^k x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \\
&= (\cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x) + \sin^2 x \cdot \cos^2 x(\cos^{k-2} x - \sin^{k-2} x) \\
&\geqslant \cos^{k+2} x - \sin^{k+2} x. \qquad ①
\end{aligned}
$$

因此，不等式对 $n = m + 2$ 的情形成立(除了 $n = 3$). 此外，当 $n \geqslant k > 1$ 时，还有

$$\frac{\cos^n x - \sin^n x}{\cos^{n-1} x - \sin^{n-1} x} \leqslant \frac{\cos^k x - \sin^k x}{\cos^{k-1} x - \sin^{k-1} x}. \qquad ②$$

事实上，将上式去分母，即化为显然的不等式

$$\sin^{k-1} x \cdot \cos^{k-1} x(\cos^{n-k} x - \sin^{n-k} x)(\cos x - \sin x) \geqslant 0,$$

所以为证不等式，只需对 $n = 3$，$m = 1$ 和 $n = 2$，$m = 1$ 的情形加以证明.

由于 $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x \leqslant \frac{1}{2}$，则

$$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \cdot \sin x) \leqslant \frac{3}{2}(\cos x - \sin x),$$

而 $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{3}{2}$，故

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) \leqslant \frac{3}{2}(\cos x - \sin x).$$

评注 利用①及②递推即可证明当 $n > m$（除 $n = 3$，$n = 1$ 和 $m = 2$，$n = 1$ 两种情形外）时，原不等式成立.

解析二 仅对 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 证明不等式. 考察函数 $f(y) = \cos^y x - \sin^y x$，其中 $0 < x < \frac{\pi}{4}$，$y \geqslant 0$. 显然 $f(0) = 0$；当 $y > 0$ 时，$f(y) > 0$；当 $y \to \infty$ 时，$f(y) \to 0$. 并且

$$\begin{aligned} f'(y) &= \cos^y x \cdot \ln\cos x - \sin^y x \cdot \ln\sin x \\ &= \cos^y x(\ln\cos x - \tan^y x \cdot \ln\sin x). \end{aligned}$$

由于 $g(y) = \tan^y x$ 单调，所以 $f'(y) = 0$ 在区间 $y > 0$ 中有唯一实根. 由 $f(2) = f(2)(\cos^2 x + \sin^2 x) = f(4)$，知 $f'(2) > 0$，$f'(4) < 0$. 从而知在 $n > m \geqslant 3$ 时，有不等式 $|\cos^n x - \sin^n x| \leqslant |\cos^m x - \sin^m x|$ 成立. 如果 $m \leqslant 2$，则利用如下不等式可得所证：

$$f(1) \leqslant (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = f(2) \leqslant \sqrt{2}f(1),$$
$$f(2) \leqslant (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \cdot \sin x) = f(3) \leqslant \frac{3}{2}f(1).$$

2.2.43 ★★ 设 a、b、c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长. 证明：长为 $\sin a$，$\sin b$，$\sin c$ 的三条线段可构成三角形.

解析一 由已知条件易知 $0 < a, b, c < \pi$，故 $\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 都是正数，且

$$|\cos a| < 1, \ |\cos b| < 1, \ |\cos c| < 1. \qquad ①$$

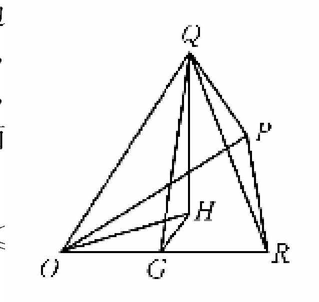
不妨设 $\sin a \leqslant \sin b \leqslant \sin c$. 若 $a = \frac{\pi}{2}$，则 $b = c = \frac{\pi}{2}$，结论显然成立.

以下设 $a \neq \frac{\pi}{2}$. 我们分两种情形讨论：

(1) 设 $a + b + c = 2\pi$，则（利用 ①）

$$\sin c=\sin(2\pi-a-b)=-\sin(a+b)$$
$$\leqslant \sin a\cdot|\cos b|+\sin b\cdot|\cos a|<\sin a+\sin b.$$

(2) 设 $a+b+c<2\pi$. 由于 a、b、c 为三角形的三边长，故存在一个三面角使得 a、b、c 分别为其面角. 如图，OR、OP、OQ 不在一平面上，$OQ=OP=OR=1$，$\angle QOR=a$，$\angle QOP=b$，$\angle POR=c$. 过 Q 作平面 POR 的垂线，垂足为 H；过 H 作 OR 的垂线，垂足为 G. 设 $\angle QOH=\varphi$，$\angle HOR=\theta$，则 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. 由勾股定理，得



$$\sin a=QG=\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\theta}$$
$$=\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta}\geqslant|\sin\theta|. \qquad ②$$

类似地有

$$\sin b=\sqrt{\sin^2(c-\theta)+\sin^2\varphi\cos^2(\theta-c)}\geqslant|\sin(c-\theta)|. \qquad ③$$

我们断言，②和③中的等号不能同时成立. 若不然，由 $\sin^2\varphi\neq 0$ 得 $\cos\theta=\cos(c-\theta)=0$，故 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，$c-\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}\pi$，这与 $0<c<\pi$ 相违. 因此，由 ②、③ 得

$$\sin a+\sin b>|\sin\theta|+|\sin(c-\theta)|\geqslant|\sin(\theta+c-\theta)|=\sin c.$$

解析二 这里的 a、b、c 无非就是一些满足特定约束条件的角，“看法”一变，解答就变得异常简单.

由已知条件易知 $0<a, b, c<\pi$，故 $\sin a$、$\sin b$、$\sin c$ 都是正数. 此外，我们有

$$0\leqslant\left|\frac{a-b}{2}\right|<\frac{c}{2}<\frac{\pi}{2}, \text{ 及 } 0<\frac{a+b-c}{4}<\frac{a+b+c}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

从而 $\cos\frac{a-b}{2}>\cos\frac{c}{2}>0$，及 $\sin\frac{a+b}{2}-\sin\frac{c}{2}=2\sin\frac{a+b-c}{4}\cos\frac{a+b+c}{4}\geqslant 0$. 因此

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}>2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}=\sin c.$$

同理，$\sin a+\sin c>\sin b$，$\sin b+\sin c>\sin a$. 故命题得证.

2.2.44 ☆☆ 设 $\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$i=1, 2, 3, 4$. 证明：存在 $x\in\mathbf{R}$，使得如下

两个不等式

$$\cos^2\theta_1\ \cos^2\theta_2-(\sin\theta_1\ \sin\theta_2-x)^2\geqslant 0, \tag{①}$$

$$\cos^2\theta_3\ \cos^2\theta_4-(\sin\theta_3\ \sin\theta_4-x)^2\geqslant 0 \tag{②}$$

同时成立的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i\leqslant 2\left(1+\prod_{i=1}^{4}\sin\theta_i+\prod_{i=1}^{4}\cos\theta_i\right). \tag{③}$$

解析 显然,①和②分别等价于

$$\sin\theta_1\ \sin\theta_2-\cos\theta_1\ \cos\theta_2\leqslant x\leqslant \sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2, \tag{④}$$

$$\sin\theta_3\ \sin\theta_4-\cos\theta_3\ \cos\theta_4\leqslant x\leqslant \sin\theta_3\ \sin\theta_4+\cos\theta_3\ \cos\theta_4, \tag{⑤}$$

不难知道,存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 ④ 和 ⑤ 同时成立的充分必要条件是

$$\sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2-\sin\theta_3\ \sin\theta_4+\cos\theta_3\ \cos\theta_4\geqslant 0, \tag{⑥}$$

$$\sin\theta_3\ \sin\theta_4+\cos\theta_3\ \cos\theta_4-\sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2\geqslant 0. \tag{⑦}$$

另一方面,利用 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$,可将式 ③ 化为

$$\cos^2\theta_1\ \cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\ \cos\theta_2\ \cos\theta_3\ \cos\theta_4+\cos^2\theta_3\ \cos^2\theta_4-\sin^2\theta_1\ \sin^2\theta_2$$
$$+2\sin\theta_1\ \sin\theta_2\ \sin\theta_3\ \sin\theta_4-\sin^2\theta_3\ \sin^2\theta_4\geqslant 0,$$

即 $$(\cos\theta_1\ \cos\theta_2+\cos\theta_3\ \cos\theta_4)^2-(\sin\theta_1\ \sin\theta_2-\sin\theta_3\ \sin\theta_4)^2\geqslant 0,$$

亦即

$$(\sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2-\sin\theta_3\ \sin\theta_4+\cos\theta_3\ \cos\theta_4)\cdot(\sin\theta_3\ \sin\theta_4$$
$$+\cos\theta_3\ \cos\theta_4-\sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2)\geqslant 0. \tag{⑧}$$

当存在 $x\in\mathbf{R}$,使得④和⑤同时成立时,由⑥和⑦立即可以推出⑧,从而有式③成立.

反之,当式③,亦即式⑧成立时,如果⑥和⑦不成立,那么就有

$$\sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2-\sin\theta_3\ \sin\theta_4+\cos\theta_3\ \cos\theta_4<0,$$

$$\sin\theta_3\ \sin\theta_4+\cos\theta_3\ \cos\theta_4-\sin\theta_1\ \sin\theta_2+\cos\theta_1\ \cos\theta_2<0.$$

两式相加,得 $2(\cos\theta_1\ \cos\theta_2+\cos\theta_3\ \cos\theta_4)<0$,此与 $\theta_i\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$,$i=1,2,3,4$ 的事实相矛盾,所以必有⑥和⑦同时成立,因此存在 $x\in\mathbf{R}$ 使得④和⑤同时成立.

2.2.45 ★★ 在$\triangle ABC$ 中,若 $\dfrac{\cos A}{\sin B}+\dfrac{\cos B}{\sin A}=2$,且$\triangle ABC$ 的周长为12.求其面积的最大可能值.

解析　由已知得 $\sin A(\cos A-\sin B)+\sin B(\cos B-\sin A)=0$，即

$$\begin{aligned}&\sin A[\sin(90^\circ-A)-\sin B]+\sin B[\sin(90^\circ-B)-\sin A]\\&=2\sin\frac{90^\circ-A-B}{2}\left[\sin A\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{A-B}{2}\right)+\sin B\cdot\cos\left(45^\circ+\frac{A-B}{2}\right)\right]\\&=2\sin\frac{90^\circ-A-B}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left[\cos\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A+\sin B)+\sin\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A-\sin B)\right]\\&=0.\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}&\cos\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A+\sin B)+\sin\frac{A-B}{2}\cdot(\sin A-\sin B)\\&=2\cos^2\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin^2\frac{A-B}{2}>0,\end{aligned}$$

故 $\sin\frac{90^\circ-A-B}{2}=0$. 所以 $90^\circ-\angle A-\angle B=0$，$\angle A+\angle B=90^\circ$，即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

设 A、B、C 分别对应的边为 a、b、c，依题意得 $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=12$. 因 $12=a+b+\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab}$，故 $ab\leqslant 36(2-\sqrt{2})^2$. 所以 $S=\frac{1}{2}ab\leqslant 18(2-\sqrt{2})^2=36(3-2\sqrt{2})$，即 $S_{\max}=36(3-2\sqrt{2})$.

2.2.46 ★★ 设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant\frac{\pi}{12}$，且 $x+y+z=\frac{\pi}{2}$. 求乘积 $\cos x\sin y\cos z$ 的最大值和最小值.

解析　为能应用已知条件，要对乘积积化和差. 由已知条件得 $x=\frac{\pi}{2}-(y+z)\leqslant\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{3}$，$\sin(x-y)\geqslant 0$，$\sin(y-z)\geqslant 0$. 于是，$\cos x\sin y\cos z=\frac{1}{2}\cos x[\sin(y+z)+\sin(y-z)]\geqslant\frac{1}{2}\cos x\sin(y+z)=\frac{1}{2}\cos^2 x\geqslant\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{1}{8}$. 且当 $x=\frac{\pi}{3}$，$y=z=\frac{\pi}{12}$ 时等号成立. 所以 $\cos x\sin y\cos z$ 的最小值为 $\frac{1}{8}$.

又 $\cos x\sin y\cos z=\frac{1}{2}\cos z[\sin(x+y)-\sin(x-y)]\leqslant\frac{1}{2}\cos z\cdot\sin(x+y)=\frac{1}{2}\cos^2 z\leqslant\frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2+\sqrt{3}}{8}$. 且当 $x=y=\frac{5\pi}{24}$，$z=\frac{\pi}{12}$ 时等号成立，所以 $\cos x\sin y\cos z$ 的最大值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$.

2.2.47 ★★ 已知锐角 α、β满足

$$\sin\beta = m\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\left(m>0,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

若 $x=\tan\alpha$，$y=\tan\beta$，

(1) 求 $y=f(x)$ 的表达式；

(2) 在(1)下，当 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$时，求函数 y 的最大值.

解析 (1) 由 $\sin\beta = m\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\left(m>0,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}\right)$，有 $\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=m\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha$，即

$$\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\alpha=(m+1)\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha.$$

因为 α、β为锐角，且$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，所以，$\tan(\alpha+\beta)=(m+1)\tan\alpha$. 所以 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{m\tan\alpha}{1+(m+1)\tan^2\alpha}$，故 $y=\frac{mx}{1+(m+1)x^2}$.

(2) 由(1)知

$$y=\frac{mx}{1+(m+1)x^2}=\frac{1}{\frac{1}{mx}+\left(\frac{1+m}{m}\right)x}\quad(x\geqslant 1).$$

令 $u(x)=\frac{1}{mx}+\frac{m+1}{m}x$，设 $1\leqslant x_1<x_2$，则有

$$u(x_1)-u(x_2)=\frac{x_1-x_2}{mx_1x_2}[(m+1)x_1x_2-1]<0,$$

即 $u(x_1)<u(x_2)$. 这说明 $u(x)=\frac{1}{mx}+\frac{m+1}{m}x$ 在$[1,\ +\infty)$上单调递增. 故 $f(x)_{\max}=\frac{m}{m+2}$.

2.2.48 ★☆ 设函数 $f(x)=|\cos x+\alpha\cos 2x+\beta\cos 3x|$，其中 α，β是实数，求：$M=\min\limits_{\alpha,\beta}\max\limits_{x}f(x)$.

解析 显然 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|$，$f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|$，从而

$$\max f(x)\geqslant\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|+\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right|\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是得到 $M \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$…①.

另一方面,令 $\alpha=0$, $\beta=-\frac{1}{6}$, 有 $f(x)=\left|\cos x-\frac{1}{6}\cos 3x\right|=\left|\frac{3}{2}\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x\right|$. 易知 $\max\limits_{x} f(x)=\max\limits_{1\leqslant y\leqslant 1}|g(y)|=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y)$,其中 $g(y)=\frac{3}{2}y-\frac{2}{3}y^3$. 而

$$g(y)-g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\left(y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}\right)\right],$$

所以当 $0\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,由 $y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}\leqslant \frac{9}{4}$ 可得 $g(y)-g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\leqslant 0$;

当$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 时,由 $y^2+\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{4}\geqslant \frac{9}{4}$ 可得 $g(y)-g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\leqslant 0$. 于是得到 $\max\limits_{x} f(x)=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant 1} g(y)=g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由此可得 $M\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$…②.

综合 ① 和 ② 可知 $M=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.2.49 ★★ 给定 $n\in\mathbf{N}$ 与 $a\in[0, n]$,在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$ 的条件下,求 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$ 的最大值.

解析 由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$, 所以$\sum\limits_{i=1}^{n}\cos 2x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}(1-2\sin^2 x_i)=n-2a$. 考虑平面上 n 个单位向量$(\cos 2x_i, \sin 2x_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$. 它们的和的长度不超过 n, 即$\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\cos 2x_i\right)^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right)^2\leqslant n^2$. 于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|\leqslant \sqrt{n^2-(n-2a)^2}=2\sqrt{a(n-a)}.$$

另一方面,若取

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\arcsin\sqrt{\frac{a}{n}},$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a}{n}=a$, $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2\sqrt{a(n-a)}}{n}=2\sqrt{a(n-a)}$.

因此,所求的最大值是 $2\sqrt{a(n-a)}$.

2.2.50 ☆☆ 函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关. 问 A、B 取什么值时 M 为最小? 证明你的结论.

解析 (1) $F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$, 当 $A=B=0$ 时, $F(x)$ 成为 $f(x)=\sqrt{2}\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$, 在区间 $\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ 上有三点 $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{5\pi}{8}$, $x_3=\frac{9\pi}{8}$, 使 $f(x)$ 取得最大值 $M_f=\sqrt{2}$, 它就是我们所要求的最小的 M 的值.

(2) 下面证明,对任何不同时为 0 的 A、B 有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} F(x)>\max_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} f(x)=M_f=\sqrt{2}. \qquad ①$$

(i) 当 $A=0$, $B\neq 0$ 时,显然 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}} F(x)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}}\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+B\right|$, 所以①式成立.

(ii) 当 $A>0$, $B\geqslant 0$ 时,因为 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B>\sqrt{2}$, 所以①式成立.

(iii) 当 $A>0$, $B<0$ 时,再分两种情形:

Ⅰ. 若 $|B|<\frac{9\pi}{8}A$, 则 $\frac{9\pi}{8}A+B>0$, 于是 $F\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$, 所以①式成立.

Ⅱ. 若 $|B|\geqslant\frac{9\pi}{8}A$, 则 $|B|>\frac{5\pi}{8}A$, $\frac{5\pi}{8}A+B<0$, 于是 $F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$, 所以①式成立.

(iv) 当 $A<0$, $B\leqslant 0$ 时,因为 $F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$, 所以①式成立.

(v) 当 $A<0$, $B>0$ 时,再分两种情况:

Ⅰ. 若 $B<-\frac{5\pi}{8}A$, 则 $\frac{5\pi}{8}A+B<0$, 于是 $F\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$, 所以①式成立.

Ⅱ. 若 $B\geqslant-\frac{5\pi}{8}A$, 则 $B>-\frac{\pi}{8}A$, 即 $\frac{\pi}{8}A+B>0$, 于是 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+\right.$

$\left.\frac{\pi}{8}A+B\right|>\sqrt{2}$，所以①式成立.

综合上述五种情况，所以①式成立.

2.2.51 ★★ 求常数 c 的值，使函数 $f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}+c$ 在区间 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 上为奇函数.

解析 假设所求常数 c 是存在的，由函数 $f(x)$ 为奇函数，有 $f(0)=\arctan 2+c=0$，故 c 的唯一可能值为 $-\arctan 2$.

下面再证明在区间 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$ 上，函数 $f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}-\arctan 2$ 是奇函数，即满足关系式：$f(x)=-f(-x)$. ①

设 $z=\frac{2-2x}{1+4x}$，易知 $z=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2(1+4x)}$. 当 $-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}$ 时，$z>\frac{3}{4}$. 所以 $\arctan\frac{3}{4}<\arctan z<\frac{\pi}{2}$，$\arctan\frac{3}{4}-\arctan 2<\arctan z-\arctan 2<\frac{\pi}{2}-\arctan 2$. 故①式等价于

$$\tan f(x)=\tan(-f(-x)). \quad ②$$

但由三角公式可得 $\tan f(x)=-2x$，$\tan[-f(-x)]=-2x$，故②式成立，从而①式成立. 于是 $c=-\arctan 2$.

2.2.52 ★★ 求 $10\cot(\operatorname{arccot}3+\operatorname{arccot}7+\operatorname{arccot}13+\operatorname{arccot}21)$ 的值.

解析 令 $a_n=1+n+n^2$，则 $a_1=3$，$a_2=7$，$a_3=13$，$a_4=21$. 我们先来证明一个公式：

$$\operatorname{arccot}(1+n+n^2)=\arctan(n+1)-\arctan n. \quad ①$$

事实上，设 $\alpha=\arctan(n+1)$，$\beta=\arctan n$. 则 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，且 $\alpha>\beta$，$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$. 又

$$\begin{aligned}\cot[\arctan(n+1)-\arctan n]&=\cot(\alpha-\beta)\\&=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{1+(n+1)\cdot n}{(n+1)-n}\\&=1+n+n^2.\end{aligned}$$

所以
$$\operatorname{arccot}(1+n+n^2)=\arctan(n+1)-\arctan n.$$

令 $\theta=\operatorname{arccot}3+\operatorname{arccot}7+\operatorname{arccot}13+\operatorname{arccot}21$. 由公式①可得

$$\operatorname{arccot}3=\arctan 2-\arctan 1,\ \operatorname{arccot}7=\arctan 3-\arctan 2,$$
$$\operatorname{arccot}13=\arctan 4-\arctan 3,\ \operatorname{arccot}21=\arctan 5-\arctan 4.$$

以上四式相加得 $\theta=\arctan 5-\arctan 1$. 于是

$$\begin{aligned}&10\cot(\operatorname{arccot}3+\operatorname{arccot}7+\operatorname{arccot}13+\operatorname{arccot}21)\\=&10\cot\theta=10\cot(\arctan 5-\arctan 1)\\=&10\cdot\frac{1+5\cdot 1}{5-1}=15.\end{aligned}$$

2.2.53 ★★ 解不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2 x+1\leqslant\sqrt{2}\,|\tan x|(\sin x+\cos x).$$

解析 设 x, y 满足不等式,由 $\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$ 可得

$$\begin{aligned}\tan^2x+1&\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\\&\leqslant\sqrt{2}\,|\tan x|(\sin x+\cos x)\leqslant 2|\tan x|.\end{aligned}$$

由于 $\tan^2x+1\geqslant 2|\tan x|$,所以

$$\begin{aligned}\tan^2x+1&=\sqrt{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}}+\tan^2x+1\\&=\sqrt{2}\,|\tan x|(\sin x+\cos x)=2|\tan x|.\end{aligned}$$

由此可推出
$$\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{|x|+|y|}{\pi}=0,$$
$$|\tan x|=1,\ \sin x+\cos x=\sqrt{2}.$$

于是 $x=\frac{\pi}{4}+2n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, $|x|+|y|=\pi$, 从而 $n=0$, 即 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}\pi$.

反之,当 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\pm\frac{3}{4}\pi$ 时,不等式显然成立. 综上可知 $(x,y)\in\left\{\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right),\left(\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}\right)\right\}$ 为所求的解.

2.2.54 ★☆ a 是 $(0,1)$ 内一个实数,考虑数列 $\{x_n\mid n=0,1,2,\cdots\}$, 其中

$$x_0=a,\ x_n=\frac{4}{\pi^2}\left(\arccos x_{n-1}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\arcsin x_{n-1},\ n=1,2,3,\cdots$$

学奥数，这里总有一本适合你

2000年华东师范大学出版社出版了《奥数教程》丛书，首次在书名中使用“奥数”一词。《奥数教程》由国家集训队教练组执笔联合编写，获得第十届全国教育图书展优秀畅销图书奖，深受读者喜爱，被奉为经典奥数蓝皮书。

自《奥数教程》出版以来，华东师范大学出版社聚集国内最顶尖的作者团队，陆续为不同层次、不同需求的读者打造了近200种奥数图书，形成多品种、多层次、全系列的格局，“奥数”图书累计销量超1000万册，由此奠定了奥数品牌出版社的地位。

“奥数”入门篇——《从课本到奥数》（1-9年级）A、B版

“奥数”智优篇——《优等生数学》（1-9年级）

“奥数”辅导篇——《奥数教程》、《学习手册》、《能力测试》（一至高三年级）

“奥数”小学顶级篇——《高思学校竞赛数学课本》、《高思学校竞赛数学导引》

“奥数”专题篇——《数学奥林匹克小丛书》（小学、初中、高中共30种）

“奥数”题库篇——《多功能题典 数学竞赛》（小学、初中、高中共3种）

“奥数”高中预赛篇——《高中数学联赛备考手册（预赛试题集锦）》

“奥数”联赛冲刺篇——《高（初）中数学联赛考前辅导》

“奥数”IMO 终极篇——《走向IMO：数学奥林匹克试题集锦》

“奥数”域外篇——《日本小学数学奥林匹克》、《全俄中学生数学奥林匹克》