

方向卷 B 参考答案

一、单选题

1. 【答案】A

【解析】 $A = [1, +\infty)$, $B = [0, +\infty)$, $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, 1)$, $B \cap \complement_{\mathbb{R}} A = [0, 1)$, 选 A.

2. 【答案】D

【解析】法一：设 $z = a + bi$, 则 $\left| \frac{z}{1+i} \right|^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$, $z(2-i) = 2a + b + (2b-a)i$,

故 $\frac{a^2 + b^2}{2} = 2a + b + (2b-a)i$, 即 $\begin{cases} \frac{a^2 + b^2}{2} = 2a + b \\ 2b - a = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

所以 $|z| = 0$ 或 $2\sqrt{5}$. 故选 : D.

法二： $\frac{|z|^2}{2} = z(2-i)$, $\therefore \left| \frac{|z|^2}{2} \right| = |z||2-i| = \sqrt{5}|z|$,

$\therefore |z|^2 = 2\sqrt{5}|z|$, $\therefore |z| = 0$ 或 $2\sqrt{5}$. 故选 : D.

3. 【答案】B

【解析】 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_1 + 3d = 9 \end{cases}$, $\therefore \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$, $S_5 = 5a_1 + 10d = 5 + 20 = 25$, 选 B.

4. 【答案】C

5. 【答案】D

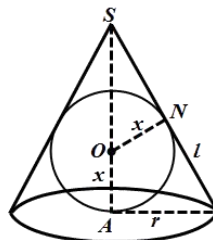
【解析】 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi l = 2\pi r$, $\therefore l = 2r = 2$,

$\therefore r = 1$, $h = \sqrt{3}r = \sqrt{3}$,

内切球半径设为 x ,

$\angle OSN = 30^\circ$, $\therefore SO = 2x$, $\therefore SM = 3x = \sqrt{3}$,

$\therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $S_{\text{表}} = 4\pi x^2 = \frac{4}{3}\pi$.



6. 【答案】 C

【解析】 因为 $(x^2 + 2x + 3)(2x + 1)^6 = (x^2 + 2x + 3) \sum_{k=0}^6 C_6^k \cdot 2^k x^k$

所以 x^2 的系数为 $C_6^0 \cdot 2^0 + 2 \cdot C_6^1 \cdot 2^1 + 3 \cdot C_6^2 \cdot 2^2 = 205$.

故选：C

7. 【答案】 C

【解析】 $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ ，周期为 2π ，下求 y 在 $[0, 2\pi]$ 上最大值.

$$y' = \cos x + \cos 2x = 0, \quad x = \frac{\pi}{3} \text{ 或 } \pi \text{ 或 } \frac{5}{3}\pi,$$

$$y \text{ 在 } \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \nearrow, \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \searrow, \left(\pi, \frac{5}{3}\pi\right) \searrow, \left(\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right) \nearrow$$

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 时, } y = \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad x = 2\pi \text{ 时, } y = 0$$

$$\therefore y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

8. 【答案】 B

【解析】 B 为 FC 中点，设 $C\left(m, \frac{b}{a}m\right)$ ，则 $B\left(\frac{m-c}{2}, \frac{b}{2a}m\right)$ ， B 在 $y = -\frac{b}{a}x$ ，

$$\therefore \frac{bm}{2a} = -\frac{b}{a} \frac{m-c}{2}, \quad \therefore m = \frac{c}{2}, \quad \therefore B\left(-\frac{1}{4}c, \frac{bc}{4a}\right), \quad A\left(-\frac{5}{8}c, \frac{bc}{8a}\right), \quad A \text{ 在双曲线上},$$

$$\frac{25}{64} \frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{64} \frac{c^2}{a^2} = 1, \quad \therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{8}{3}, \quad \therefore e = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

二、多选题

9. 【答案】 ABD

【解析】 由基本不等式有 $1 = abc \leq \frac{(a+b)^2 c}{4}$ ，

所以 $(a+b)\sqrt{c} \geq 2$ ，A 正确；

$$\text{又 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = bc + ac + ab \leq \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{a^2 + b^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2, \text{ B 正确};$$

$$\text{由 } 0 < c \leq 1, \text{ 则 } ab = \frac{1}{c} \geq 1,$$

$$\text{所以 } (a+1)(b+1) = ab + a + b + 1 \geq ab + 2\sqrt{ab} + 1 \geq 4, \text{ C 错误};$$

$$\text{易知 } \frac{a^2}{b^2} + 2b^2c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2b}{a} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 1 \geq 3, \text{ D 正确};$$

故选：ABD.

10. 【答案】AD

$$\text{【解析】 } f(x) \text{ 关于 } x = \frac{2\pi}{3} \text{ 对称, } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}, f(x) \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \searrow,$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\omega + \varphi = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4}\omega + \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \therefore \begin{cases} \omega = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} \end{cases}, \text{B 错}; f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right), 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}, k = -1 \text{ 时}, x = -\frac{7}{12}\pi, f(x) \text{ 关于 } \left(-\frac{7}{12}\pi, 0\right) \text{ 对称, A 对};$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{12} + k\pi, f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{12}\right] \text{ 单调增},$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[-\frac{5}{12}\pi, 0\right] \text{ 单调增, 错, 即 C 错};$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1, \text{ D 对, 故选 AD.}$$

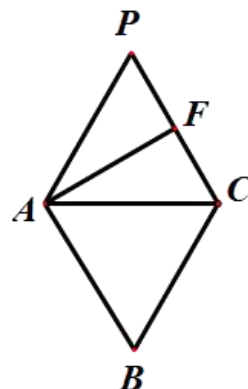
11. 【答案】BC

【解析】对于 A 选项，如下展开图，

易知 $AF \perp AB$ ，则有 $DE + EF \geq AF = \sqrt{3}$ ，又因为 D 、 E 不能是端点，故有 $DE + EF > \sqrt{3}$ ，没有最小值，A 错误；

对于 B 选项，设 $PD = m$ ，易知 $m \geq \sqrt{3}$ ，

又有 $\triangle PAD \cong \triangle CAD$ ，所以 $CD = PD = m$ ，



连结 DF , 则有 $DF \perp PC$, 故 $DF = \sqrt{m^2 - 1} \geq \sqrt{2}$, B 正确 ;

对于 C 选项 , 设等边 $\triangle ABC$ 的中心为 O , 连结 PO ,

易知 $PO \perp$ 平面 ABC , 则 $PO = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

所以可知 $V_{F-BDEC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PO \times S_{BDEC} = \frac{\sqrt{6}}{9} S_{BDEC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

得 $S_{BDEC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, 所以 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} - S_{BDEC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

又 $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot AE \cdot \sin \frac{\pi}{3}$,

则有 $AD \cdot AE = 1$, 又 $0 < AE < 2$, 可得 $\frac{1}{2} < AD < 2$,

所以 $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2 - AD \cdot AE} = \sqrt{AD^2 + \frac{1}{AD^2} - 1} \in \left[1, \frac{\sqrt{13}}{2} \right)$, C 正确 ;

对于 D 选项 , 设 $CE = t$,

则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FE} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE}) = 1 + t^2 - \frac{3}{2}t = \frac{1}{2}$,

解得 $t = \frac{1}{2}$ 或 1 , 即 $CE = \frac{1}{2}$ 或 1 , D 错误 ;

故选 : BC.

12 . 【答案】 AC

【解析】 对于 A , 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[m_1, n_1]$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为 $[m_2, n_2]$

$\therefore |f(x) + g(x)|_{[a, b]}^* \leq n_1 + n_1 - m_1 - m_2 = (n_1 - m_1) + (n_2 - m_2) + |f(x)|_{[a, b]}^* + |g(x)|_{[a, b]}^*$

A 正确.

对于 B , 取 $f(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $[a, b] = [1, 2]$

则 $|f(x) + g(x)|_{[a, b]}^* = \left| x + \frac{1}{x} \right|_{[1, 2]}^* = \frac{1}{2}$, $|f(x)|_{[a, b]}^* = |x|_{[1, 2]}^* = 1$, $|g(x)|_{[a, b]}^* = \left| \frac{1}{x} \right|_{[1, 2]}^* = \frac{1}{2}$

此时 $|f(x) + g(x)|_{[a,b]}^* \neq |f(x)|_{[a,b]}^* + |g(x)|_{[a,b]}^*$, B 错.

对于 C , 设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 上的值域为 $[m_1, n_1]$, $f(x)$ 在 $[x_0, b]$ 上的值域为 $[m_2, n_2]$

$\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的值域为

$$[\min\{m_1, m_2\}, \max\{n_1, n_2\}] = \left[\frac{m_1 + m_2 - |m_1 - m_2|}{2}, \frac{n_1 + n_2 + |n_1 - n_2|}{2} \right]$$

$$\therefore |f(x)|_{[a, x_0]}^* + |f(x)|_{[x_0, b]}^* = n_1 - m_1 + n_2 - m_2$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 - (m_1 + m_2) + \frac{m_1 + m_2 - |m_1 - m_2|}{2} - \frac{n_1 + n_2 + |n_1 - n_2|}{2} \\ = \frac{n_1 + n_2 - |n_1 - n_2| - |m_1 - m_2| - (m_1 + m_2)}{2} = \min\{n_1, n_2\} - \max\{m_1, m_2\} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore |f(x)|_{[a, x_0]}^* + |f(x)|_{[x_0, b]}^* \geq |f(x)|_{[a, b]}^* , \text{ C 正确}$$

对于 D , 不妨取 $[a, b] = [0, 3]$, 且 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$

则任取 $x_0 \in (0, 3)$, 均有 $|f(x)|_{[a, x_0]}^* + |f(x)|_{[x_0, b]}^* = |f(x)|_{[a, b]}^*$, 但 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内单调不减 ,

故 D 错 , 选 AC.

三、填空题

13 . 【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】切点 $(0, 1)$, $f'(x) = e^x + 1$, $k = 2$, 切线 : $y - 1 = 2x$, 即 $y = 2x + 1$, 与 y 轴交点 $(0, 1)$, 与 x 轴交点 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

14 . 【答案】 0.243

【解析】 $P(70 < X < 110) = 0.8$, $\therefore P(90 < X < 110) = 0.4$, $\therefore P(X \geq 110) = 0.1$

$$P = C_3^1 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.3 \times 0.81 = 0.243 .$$

15 . 【答案】 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

【解析】因为 D 在线段 BC 上， $CD = 2BD$ ，所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

设 $\overrightarrow{AE} = t\overrightarrow{AD} = \frac{2t}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{t}{3}\overrightarrow{AC}$ ($t > 1$)，则 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}t\overrightarrow{AB} + \left(\frac{t}{3} - 1\right)\overrightarrow{AC}$

$$\text{所以} \begin{cases} \frac{2}{3}t = \lambda \\ \frac{t}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{8}{3} \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{3}}{4}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{3}$$

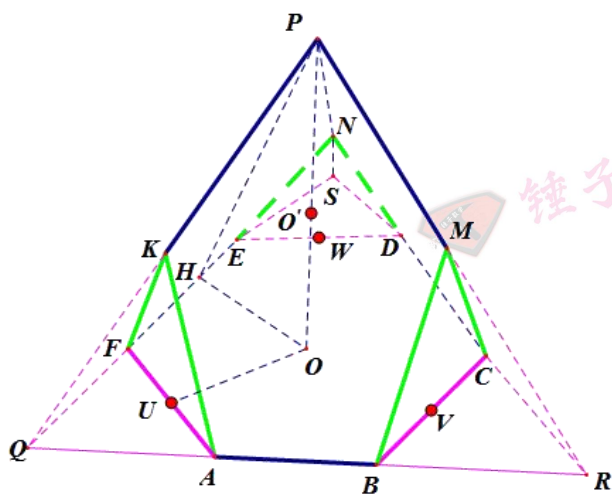
$$\text{即 } |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| = 16, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos \angle BAC = 8.$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CE}|^2 &= \frac{64|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 16\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{9} = \frac{64|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 128}{9} \\ &\geq \frac{16|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| + 128}{9} = \frac{384}{9} \end{aligned}$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{CE}| \geq \frac{8\sqrt{6}}{3}, \text{ 当且仅当 } \begin{cases} AB \cdot AC = 16 \\ 8AB = AC \end{cases} \text{ 即 } AB = \sqrt{2}, AC = 8\sqrt{2} \text{ 时取等.}$$

16. 【答案】108 ; 75π

【解析】



设 P 在底面的射影为 O ，过 O 作 $OH \perp EF$ 过点 H ， $DE = DC = 3\sqrt{2}$

$$\therefore OH = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \text{斜率 } PH = 6\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \text{高 } PO = \sqrt{\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}$$

$$OQ = 3\sqrt{6}, \therefore PQ = \sqrt{PO^2 + OQ^2} = \sqrt{27 + 54} = \sqrt{81} = 9.$$

易知 PQ, PR, PS 两两垂直, 且 $PQ = PR = PS = 9$,

$$V_{P-QRS} = \frac{1}{6} \times 9^3 = \frac{972}{8} \text{ 且 } QK = 9 - 6 = 3, V_{Q-AKF} = \frac{1}{6} \times 3^3 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{所求多面体体积 } V = \frac{972}{8} - \frac{9}{2} \times 3 = 108.$$

(2) 设 AF, BC, DE 中点分别为 U, V, W

易知 U, V, W 分别为 $\triangle AKF, \triangle BCM, \triangle DEN$ 的外心

$\therefore$ 多面体球心 O' 在 OP 上, 设球半径为 R , $\therefore O'P = O'A = R$

$$OO' = 3\sqrt{3} - R, OU = \frac{3\sqrt{6}}{2}, UA = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore O'A = \sqrt{O'O^2 + OA^2} = \sqrt{(3\sqrt{3} - R)^2 + (3\sqrt{2})^2}, \therefore (3\sqrt{3} - R)^2 + (3\sqrt{2})^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 27 - 6\sqrt{3}R + 18 = 0 \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \therefore S_{\text{表}} = 4\pi \times \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 75\pi.$$

四、解答题

17. 【解析】(1) 由题知 $a_4^2 = a_2 a_7 \Rightarrow a_4^2 = (a_4 - 2d)(a_4 + 3d) \Rightarrow da_4 = 6d^2$,

而 $d \neq 0$, 故 $a_4 = 6d$,

由 $S_5 = 5a_3 = 50 \Rightarrow a_3 = 10$, $\therefore d = 2, a_1 = 6$,

$\therefore a_n = 2n + 4$;

$$(2) \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+4)(2n+6)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right),$$

$$\therefore \text{前 } n \text{ 项和为 } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{n}{12(n+3)}.$$

18. 【解析】(1) ① $-\cos(A+B) + \cos B \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$

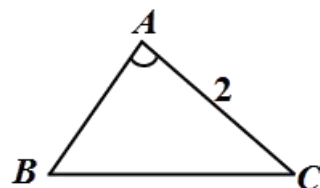
$$\therefore -\cos A \cos B + \sin A \sin B + \cos B \cos A - \sqrt{3} \sin B \cos A = 0$$

$$\therefore \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cos A, \therefore \cos A = \frac{1}{2}, A = \frac{\pi}{6}$$

$$\textcircled{2} 2a^2 = 2b^2 - bc + 2c^2 - bc, \therefore bc = b^2 + c^2 - a^2, \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R ,



$$\therefore 2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\sin B},$$

$$2a + c = 2R(2\sin A + \sin C) = \frac{2}{\sin B}(\sqrt{3} + \sin C) = \frac{2}{\sin B}(\sqrt{3} + \sin(A+B))$$

$$= \frac{2}{\sin B} \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B \right) = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} + \frac{\sqrt{3} \cos B}{\sin B} + 1$$

$$\triangle ABC \text{ 是锐角 } \Delta, \therefore \begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \sin B \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right) \nearrow, \cos B \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right) \searrow$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} + \frac{\sqrt{3} \cos B}{\sin B} \text{ 在 } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right) \searrow, \therefore 2a + c \in (2\sqrt{3} + 1, 4\sqrt{3} + 4)$$

19. 【解析】(1) 该工业区被调查的化工企业的污染情况标准分的平均值:

$$(10 \times 0.0050 + 30 \times 0.0125 + 50 \times 0.0150 + 70 \times 0.010 + 90 \times 0.0075) \times 20 = 51,$$

故该工业区的化工企业的治污平均值水平基本达标;

(2) 化工企业污染情况标准分基本服从正态分布 $N(50, 16^2)$

标准分在 $[18, 34)$ 内的概率, $P(18 \leq X < 34) = \frac{0.954 - 0.683}{2} = 0.1355$

$\therefore$ 60%的标准分在 $[18, 34)$ 内的化工企业, 每月可减少的直接损失为:

$$10000 \times 0.6 \times 0.1355 \times 4 = 3252 \text{ 万元},$$

标准分低于 18 分的概率, $P(X < 18) = \frac{1 - 0.954}{2} = 0.023$,

$$\therefore 10000 \times 0.8 \times 0.023 \times 10 = 1840 \text{ 万元}$$

故该市决定关停 80% 的标准分低于 18 分的化工企业和 60% 的标准分在 $[18, 34)$ 内的化工企业, 每月可减少的直接损失约有 5092 万元.

20. 【解析】(1) 取 AD 中点 F , 连接 EF, CF, AC

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle B = 60^\circ$

$\therefore \triangle ACD$ 是等腰三角形, 又 $\because F$ 是 AD 中点, $\therefore CF \perp AD$

又 $\because CE \perp AD$, $CF \cap CE = C$

$\therefore AD \perp$ 面 CEF , $\therefore AD \perp EF$

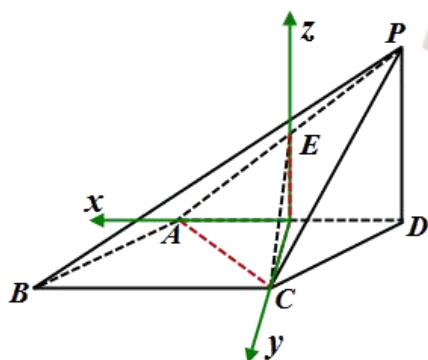
又 $\because E$ 是 AP 中点, $\therefore EF$ 是 $\triangle APD$ 中等线

$\therefore EF \parallel PD$, $\therefore PD \perp AD$

又 $\because$ 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$, 面 $PAD \cap$ 面 $ABCD = AD$

$\therefore PD \perp$ 面 $ABCD$

(2) 以 F 点为原点, FA 为 x 轴, FC 为 y 轴, FE 为 z 轴建系



设 $AB = 2$, $PD = a$

$$\therefore A(1,0,0), D(-1,0,0), P(-1,0,a), E\left(0,0,\frac{a}{2}\right), B(2,\sqrt{3},0), C(0,\sqrt{3},0)$$

$$\because CE=AB, \therefore \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2, a=2$$

$$F(-1,0,2)$$

$$\overrightarrow{AP}=(-2,0,2), \overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{AC}=(-1,\sqrt{3},0)$$

设平面 ABP 的向量是 $\vec{n}_1=(x_1, y_1, z_1)$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2z_1 = 0 \\ x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0 \end{cases}, \therefore \vec{n}_1 = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

平面 ACP 的法向量 $\vec{n}_2=(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{cases} -2x_2 + 2z_2 = 0 \\ x_2 - \sqrt{3}y_2 = 0 \end{cases}, \vec{n}_2 = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$$

$\therefore$ 设二面角 $C-PA-B$ 的平面角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1 - \frac{1}{3} + 1}{\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{5}{7}$$

$\therefore$ 二面角 $C-PA-B$ 的平面角的余弦值为 $\frac{5}{7}$.

21. 【解析】(1) 以抛物线 C 的顶点 O 为坐标原点, 对称轴 l 为 x 轴, 开口方向为 x 轴正方向

建立坐标系, 则 $C: y^2 = 2px$, $F_1\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,

设点 $A\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ 为 x 轴上方抛物线 C 上任意一点,

当 $y > 0$ 时, $y = \sqrt{2px}$, $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{x}}$,

所以点 $A\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ 处切线的斜率为 $k_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{x_0}} = \frac{p}{y_0}$,

所以点 $A\left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ 处法线的斜率为 $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{y_0}{p}$,

所以过点 A 的法线方程为 $y - y_0 = -\frac{y_0}{p}\left(x - \frac{y_0^2}{p}\right)$, 与 x 轴交于点 $B\left(p + \frac{y_0^2}{p}, 0\right)$,

所以 $\cos \angle F_1AB = \frac{\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AF_1}| |\overrightarrow{AB}|}$,

所以 $\tan^2 \angle F_1AB = \frac{1}{\cos^2 \angle F_1AB} - 1 = \frac{y_0^2}{p^2} = k_2^2$,

由对称性可知, 当光源位于 F_1 时, 此时发出的一束不与 l 重合的光线经 C 反射后与 l 平行.

(2) 设分别由 F_1, F_2 发出的两束不与 l 重合的光线均经 C 上点 M 反射, 反射后的光线分别为 MP, MN , 则由 (1) 可知 $MP \parallel x$ 轴,

所以 $\angle PMN = \angle MNO$,

又由光线反射后的反射角等于入射角可知, $\angle PMN = \angle F_1MF_2$,

所以 $\angle F_1MF_2 = \angle MNO$, $\Delta F_1MF_2 \sim \Delta F_1NM$,

所以 $\frac{|F_1M|}{|F_1F_2|} = \frac{|F_1N|}{|F_1M|}$,

当 $p = 2$, $|NF_2| = 3$ 时, $|F_1M| = 2 = p$,

所以 $F_1M \perp x$ 轴, ΔF_1MF_2 为直角三角形,

又 $|F_1F_2| = \frac{p}{2} = 1$, 由勾股定理可知, $|MF_2| = \sqrt{|MF_1|^2 + |F_1F_2|^2} = \sqrt{5}$.

22. 【解析】(1) 易知 $y = \ln x$ 在 $x = 1$ 处切线为 $x - 1$

记 $f(x) = \ln x - x + 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 1) \nearrow$, $(1, +\infty) \searrow$, $\therefore f(x) \leq f(1) = 0$

$\therefore \ln x \leq x - 1$, 当 $x = 1$ 时, $\therefore \ln 1.1 < 0.1$

(2) 即比较 $e \ln \pi$ 与 3 的大小

只需比较 $\ln \pi$ 与 $\frac{3}{e}$ 大小

令 $y = \ln x$ 与 $y = \frac{a}{x^2} + b$ 公切于 e

$$\text{则有} \begin{cases} \ln e = \frac{a}{e^2} + b \\ \frac{1}{e} = -\frac{2a}{e^3} \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{e^2}{2}, b = \frac{3}{2}$$

法一： $\therefore y = -\frac{e^2}{2x^2} + \frac{3}{2}$

记 $g(x) = \ln x + \frac{e^2}{2x^2} - \frac{3}{2}$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{e^2}{x^3} = \frac{x^2 - e^2}{x^3}$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, e) \searrow$, $(e, +\infty) \nearrow$

$$\therefore g(x) \geq g(e) = 0, \therefore \ln x \geq -\frac{e^2}{2x^2} + \frac{3}{2}$$

$$\therefore \ln \pi > -\frac{e^2}{2\pi^2} + \frac{3}{2}, \text{下证: } \frac{3}{2} - \frac{e^2}{2\pi^2} > \frac{3}{e}$$

只需证 $\frac{3}{e} + \frac{e^2}{2\pi^2} < \frac{3}{2}$

$$\therefore \frac{3}{e} + \frac{e^2}{2\pi^2} < \frac{3}{2.7} + \frac{(2.72)^2}{2 \times (3.1)^2} = \frac{10}{9} + \frac{(2.72)^2}{2 \times (3.1)^2}$$

只需证 $\left(\frac{2.72}{3.1}\right)^2 < \frac{7}{9}$,

$$\therefore \frac{2.72}{3.1} < 0.88, (0.88)^2 = 0.7744$$

而 $\frac{7}{9} = 0.777 > 0.7744$, $\therefore \ln \pi > \frac{3}{e}$, 即 $\pi^e > e^3$.

法二：

只需比较 $\ln \pi$ 与 $\frac{3}{e}$, 即 $-\ln \frac{1}{\pi}$ 与 $\frac{3}{e}$, 则比较 $\ln \frac{1}{\pi}$ 与 $-\frac{3}{e}$ 即可,

令 $y = \ln x$ 与 $y = kx + t$ 公切于 $\frac{1}{e}$, 则有 $\begin{cases} \ln \frac{1}{e} = k \frac{1}{e} + t \\ e = k \end{cases} \Rightarrow k = e, t = -2$, $\therefore y = ex - 2$

令 $g(x) = \ln x - ex + 2$, $g'(x) = \frac{1}{x} - e = \frac{1 - ex}{x}$

$\therefore g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ $\nearrow$, $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ $\searrow$

$\therefore g(x) \leq g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, $\therefore \ln x \leq ex - 2$, 当 $x = \frac{1}{e}$ 取等

$\therefore \ln \frac{1}{\pi} \leq \frac{e}{\pi} - 2$, 下证 $\frac{e}{\pi} - 2 < -\frac{3}{e}$, 只需证 $\frac{e}{\pi} + \frac{3}{e} < 2$

$\therefore \frac{e}{\pi} + \frac{3}{e} < \frac{2.72}{3.1} + \frac{3}{2.7} < 0.88 + \frac{10}{9}$

$\therefore 2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9} = 0.\dot{8} > 0.88$, $\therefore \ln \frac{1}{\pi} < -\frac{3}{e}$, $\therefore \ln \pi > \frac{3}{e}$, $\therefore \pi^e > e^3$.