

2021 年高考方向卷 B

锤子数学命题

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集为 R ， $A = \{x | y = \sqrt{x-1}\}$ ， $B = \{y | y = \sqrt{x-1}\}$ ，则 $B \cap C_R A =$

- A. $[0,1)$ B. $[0,1]$ C. $\{0\}$ D. \emptyset

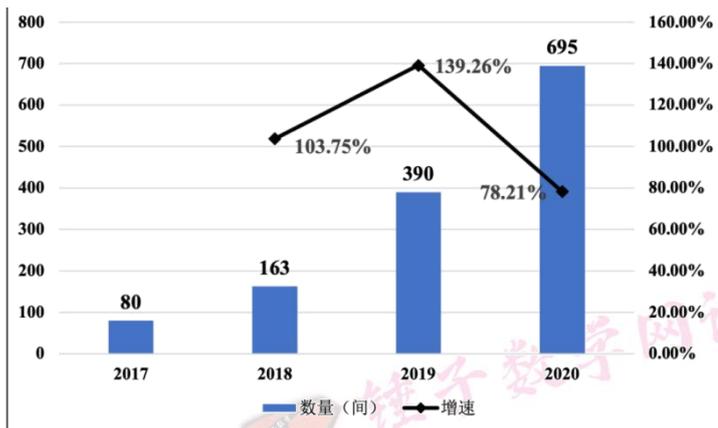
2. 复数 z 满足 $\left| \frac{z}{1+i} \right|^2 = z(2-i)$ ， i 为虚数单位，则 $|z| =$

- A. 1 B. 1 或 $3\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 0 或 $2\sqrt{5}$

3. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和为 S_n ，且 $S_1 = 1, S_3 = 9$ ，则 $S_5 =$

- A. 17 B. 25 C. 5 D. 81

4. 伴随年轻人对饮品需求的转变，奶茶逐渐成为了他们不可或缺的一部分.作为当红茶饮品牌锤子奶茶不但深受消费者的喜爱，更是带动了整个市场的品牌化、年轻化.下图为 2017—2020 年奶茶门店总数及增速图.利用统计知识进行分析，下列说法正确的是



- A. 2017—2020 年锤子奶茶店铺数量增长的越来越快
 B. 2020 年锤子奶茶店铺数量较 2017 年增加了 78.21%
 C. 2017—2020 年锤子奶茶店铺数量与时间存在曲线相关关系

D. 根据 2017—2020 年锤子奶茶店铺数量的变化趋势可以预测 2021 年锤子奶茶店铺数量会下降

6. $(x^2 + 2x + 3)(2x + 1)^6$ 的展开式中, x^2 的系数是

- A. 250 B. 520 C. 205 D. 502

7. 音乐是用声音来表达思想情感的一种艺术, 数学家傅里叶证明了所有的器乐和声乐的声音都可用简单正弦函数

$y = A \sin \omega x$ 的和来描述, 其中频率最低的称为基音, 其余的称为泛音, 而泛音的频率都是基音频率的整数倍, 当一个发声体振动发声时, 发声体是在全段振动的, 除了频率最低



的外, 其余各部分 (如二分之一、三分之一……) 也在振动, 所以我们听到声音的函数是

$y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$, 则声音函数 $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$ 的最大值是

- A. $\frac{3}{2}$ B. 1 C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

8. 一直线 l 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F , 且与双曲线的左支及两渐近线

依次交于点 A, B, C . 已知 $|FA| = |AB| = \frac{1}{2}|BC|$, 则该双曲线的离心率为

- A. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知 a, b, c 为正数, 且满足 $abc = 1$, 则下列结论正确的是

- A. $(a + b)\sqrt{c} \geq 2$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$
 C. 若 $0 < c \leq 1$, 则 $(a + 1)(b + 1) < 4$ D. $\frac{a^2}{b^2} + 2b^2c \geq 3$

10. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 图象的一条对称轴为 $x = \frac{2\pi}{3}$,

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 内单调递减, 则以下说法正确的是

- A. $\left(-\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 是其中一个对称中心 B. $\omega = \frac{14}{5}$
 C. $f(x)$ 在 $\left(-\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 单增 D. $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$

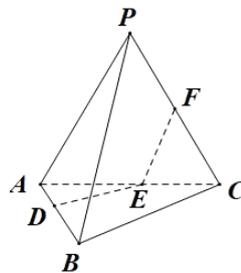
11. 如图, 在棱长为 2 的正四面体 $P-ABC$ 中, D 、 E 分别为 AB 、 AC 上的动点 (不含端点), F 为 PC 的中点, 则下列结论正确的有

A. $DE + EF$ 的最小值为 $\sqrt{3}$;

B. 若 E 为 AC 中点, 则 DF 的最小值为 $\sqrt{2}$;

C. 若四棱锥 $F-BDEC$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 则 DE 的取值范围是 $\left[1, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$

D. 若 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}$, 则 $CE = 1$



12. 对于定义在 $[a, b]$ 且值域为 $[m, n]$ 的函数 $f(x)$, 记 $|f(x)|_{[a, b]}^* = |n - m|$, 如 $|2x + 1|_{[1, 3]}^* = 4$.

则以下说法一定正确的是

- A. $|f(x) + g(x)|_{[a, b]}^* \leq |f(x)|_{[a, b]}^* + |g(x)|_{[a, b]}^*$
 B. 若 $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$, 则 $|f(x) + g(x)|_{[a, b]}^* = |f(x)|_{[a, b]}^* + |g(x)|_{[a, b]}^*$
 C. $x_0 \in (a, b)$, $|f(x)|_{[a, x_0]}^* + |f(x)|_{[x_0, b]}^* \geq |f(x)|_{[a, b]}^*$
 D. 若 $\forall x_0 \in (a, b)$, $|f(x)|_{[a, x_0]}^* + |f(x)|_{[x_0, b]}^* = |f(x)|_{[a, b]}^*$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增或单调递减.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x) = e^x + x$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线与坐标轴围成的图形面积为_____.

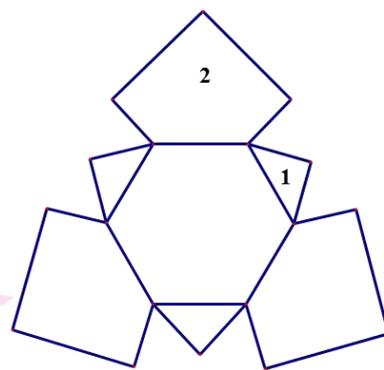
14. 某次数学考试满分 150 分, 某班同学的成绩 ξ 服从正态分布 $N(90, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 若 ξ 在

区间(70,110)的概率为0.8,则任取三名同学的成绩,仅一名同学的成绩不低于110分的概率为_____.

15.在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, D 为线段 BC 上一点,且 $CD = 2BD$,

点 E 在线段 AD 的延长线上,满足 $\overrightarrow{CE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$,则 $|\overrightarrow{CE}|$ 的最小值为_____.

16.将三个边长为6的正方形分别沿相邻两边中点裁剪而成(1、2)部分,与正六边形组合后图形如图所示,将此图形折成封闭的空间几何体,则这个几何体的体积是_____,外接球表面积为_____.



四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(10分)已知公差不为0的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , a_2, a_4, a_7 成等比数列,且 $S_5 = 50$.

(1)求 a_n ; (2)求数列 $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和.

18 . (12 分) 在锐角 $\triangle ABC$ 中 , a, b, c 分别为内角 A, B, C 的对边 , 且有 $b = 2$

在下列条件中选择一个条件完成该题目 :

① $\cos C + (\cos B - \sqrt{3} \sin B) \cos A = 0$; ② $2a \sin A = (2b - c) \sin B + (2c - b) \sin C$.

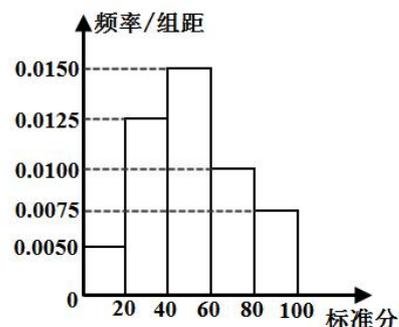
(1) 求 A 的大小 ;

(2) 求 $2a + c$ 的取值范围.



19. (12分) 近期, 某工业城市决定对该市的1万家中小型化工企业进行污染情况摸排, 并出台相应的整治措施. 通过对这些企业的排污口水质, 周边空气质量等的检验, 把污染情况综合折算成标准分100分, 发现该市的这些化工企业污染情况标准分基本服从正态分布 $N(50, 16^2)$, 分值越低, 说明污染越严重; 如果分值在 $[50, 60]$ 内, 可以认为该企业治污水平基本达标.

(1) 如图为该市的某工业区所有被调查的化工企业的污染情况标准分的频率分布直方图, 请计算这个工业区被调查的化工企业的污染情况标准分的平均值, 并判断该工业区的化工企业的治污平均值水平是否基本达标;



(2) 调查表明, 如果污染企业继续生产, 那么标准分低于18分的化工企业每月对周边造成的直接损失约为10万元, 标准分在 $[18, 34)$ 内的化工企业每月对周边造成的直接损失约为4万元. 该市决定关停80%的标准分低于18分的化工企业和60%的标准分在 $[18, 34)$ 内的化工企业, 每月可减少的直接损失约有多少?

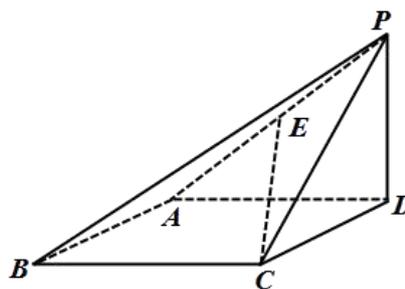
(附: 若随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68.3\%$,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95.4\%$, $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99.7\%$.)

20 .(12 分) 如图所示四棱锥 $P-ABCD$, 底面是一个菱形 , 且 $\angle B=60^\circ$, E 点为线段 PA 中点 , 且 $CE=AB$, $CE \perp AD$, 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$.

(1) 求证 : $PD \perp$ 面 $ABCD$;

(2) 求二面角 $C-PA-B$ 的余弦值 .



 锤子数学网课

 锤子数学网课

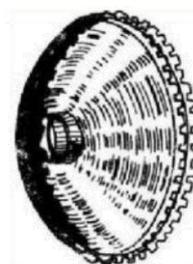
 锤子数学网课

20. (12分)汽车前照灯主要由光源、反射镜、配光片三部分组成，其中经过光源和反射镜顶点的剖面轮廓为抛物线，而光源恰好位于抛物线的焦点处，这样光源发出的每一束光线经反射镜反射后均可沿与抛物线对称轴平行的方向射出.某汽车前照灯反射镜剖面轮廓可表示为抛物线

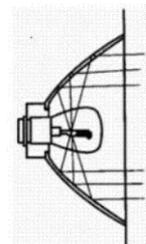
C ，已知 C 的焦点为 F_1 ，焦距为 $\frac{p}{2}(p > 0)$ ，对称轴为 l .

(1) 证明：当光源位于 F_1 时，此时发出的一束不与 l 重合的光线经 C 反射后与 l 平行；

(2) 设 $p = 2$ ，当光源位于 l 上由 F_1 向 C 的开口方向平移1个焦距长度的点 F_2 时，此时发出的一束不与 l 重合的光线经 C 上点 M 反射后又经过 l 上的点 N ，若 $|NF_2| = 3$ ，求 $|MF_2|$.



(a) 反射镜



(b) 反射示意图

锤子数学网课

锤子数学网课

22 .(12 分) 一天 , 小锤同学为了比较 $\ln 1.1$ 与 $\frac{1}{10}$ 的大小 , 他首先画出了 $y = \ln x$ 的函数图像 , 然后取了离 1.1 很近的数字 1 , 计算出了 $y = \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程 , 利用函数 $y = \ln x$ 与切线的图像关系进行比较 .

(1) 请利用小锤的思路比较 $\ln 1.1$ 与 $\frac{1}{10}$ 大小

(2) 现提供以下两种类型的曲线 $y = \frac{a}{x^2} + b$, $y = kx + t$, 试利用小锤同学的思路选择合适的曲线 , 比较 π^e, e^3 的大小 .



锤子数学网课



锤子数学网课



锤子数学网课