2021 年高考方向卷 A•参考答案

一、单选题

1. 【答案】A 【解析】$a=0$时，$y=0$与圆相交有两个交点

$a\neq 0$时，$d=\dfrac{|-a|}{\sqrt{a^4+1}}=\sqrt{\dfrac{a^2}{a^4+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$

$\therefore$直线与圆相交，有两个交点，故选 A.

2. 【答案】D 【解析】$z_1=\cos\dfrac{7}{13}\pi+i\cos\left(\dfrac{7}{13}\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\dfrac{7}{13}\pi+i\sin\dfrac{7}{13}\pi$

$z_2=\cos\dfrac{15}{13}\pi+i\cos\left(2\pi-\dfrac{15\pi}{13}\right)=\cos\dfrac{15}{13}\pi-i\sin\dfrac{15}{13}\pi\ =\cos\left(-\dfrac{15}{13}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{15}{13}\pi\right)$

$\therefore z_1z_2=\cos\left(-\dfrac{15}{13}\pi+\dfrac{7\pi}{13}\right)+i\sin\left(-\dfrac{15}{13}\pi+\dfrac{7\pi}{13}\right)=\cos\left(-\dfrac{8}{13}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{8}{13}\pi\right)$

$-\dfrac{8}{13}\pi$在第三象限

$\therefore z_1z_2$在复平面内所表示的点位于第三象限，故选 D.

3. 【答案】B【解析】出现x^3y^4前一个括号内有x^2与$2y$两项

$x^2\cdot\left(xy^4\right)=x^3y^4$

$\left(1+y-x\right)^5$展开式第$r+1$项$C_5^r\left(1+y\right)^{5-r}\left(-x\right)^r$

$r=1$，$T_2=C_5^1\left(1+y\right)^4\left(-x\right)$展开式$xy^4$系数为$-5$

$y\left(x^3y^3\right)$，$T_{r+1}=C_5^r\left(1+y\right)^{5-r}\left(-x\right)^r$

$r=3$时，$T_{r+1}=C_5^3\left(1+y\right)^2\left(-x\right)^3$不能出现$y^3$

$\therefore x^3y^4$的系数为-5.故选 B.

4. 【答案】A【解析】$\begin{cases}c^2=a^2+b^2\\ \dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\ \dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=2\\ b^2=1\\ c^2=3\end{cases}$

$\therefore$ 双曲线为 $\dfrac{y^2}{2}-x^2=1$，即 $y^2-2x^2=2$.故选 A.

5. 【答案】C【解析】$f(x)=f(4-x)$，$\therefore f(2+x)=f(2-x)$

$f(x+2)+f(-x)=4$，$\therefore f(2-x)+f(-x)=4$

$\therefore f(2+x)+f(x)=4$，$\therefore f(x+2)+f(x+4)=4$

$\therefore f(x+4)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的函数

$\therefore f(x)=f(4-x)=f(-x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数

$f(4n+1)=f(1)=2\neq 1$ 是定值，故选 C.

6. 【答案】B【解析】$\overline{x}=5\times 0.25+15\times 0.1+25\times 0.25+35\times 0.3$

$+45\times 0.06+55\times 0.04=24.2\neq 26$，A 错；

合格的同学有 80 人，其中男生 20 人，女生 60 人

不合格的同学有 120 人，其中男生 60 人，女生 60 人

在不合格的同学中分层抽样抽 10 人，则男生 5 人，女生 5 人

10 人中任取两人为一男一女的概率为 $P=\dfrac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\dfrac{5}{9}$，B 对；

设中位数为 x，则 $0.25+0.1+0.25\times\dfrac{x-20}{10}=0.5$

$\therefore x=26\neq 24$，C 错

课外阅读合格女生的概率 $P=\dfrac{60}{200}=\dfrac{3}{10}$

$10000\times\dfrac{30}{100}=3000$ 人，D 错.故选 B.

7. 【答案】D【解析】$(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{EA}$

$=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})\cdot\overrightarrow{EA}$

$=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2-\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}{2}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EA}$

$=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EC}+\dfrac{5+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}{2}=\overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC})+\dfrac{5+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}{2}$

$=-\left|\overrightarrow{DE}\right|^2+\dfrac{\left|\overrightarrow{DE}\right|^2+\left|\overrightarrow{DC}\right|^2-\left|\overrightarrow{EC}\right|^2}{2}+\dfrac{5+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}{2}=4+\dfrac{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{EC}\right|^2}{2}=4+\dfrac{\left|\overrightarrow{AE}\right|^2}{2}=\dfrac{57}{8}$

8. 【答案】C【解析】记$t=\dfrac{y}{x}\in(0,1)$，有$\tan t>t$，

所以$\sin t=\dfrac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}>\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，

令$x=1$，即有$\sin\dfrac{y}{x}>\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，A 错误；

$x^2+y^2-xy-\sqrt{2}x+1=\left(y-\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{1}{3}$，

当且仅当$x=2y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$时，取到等号，所以最小值为$\dfrac{1}{3}$，B 错误；

对于 C 选项，记$t=\dfrac{y}{x}\in(0,1)$，

等价于$t^{\frac{1-n}{2}}-t^{\frac{n+1}{2}}+n(t-1)\geq 0$，

记$f(t)=t^{\frac{1-n}{2}}-t^{\frac{n+1}{2}}+n(t-1)$，

$f'(t)=n+\dfrac{1-n}{2}t^{-\frac{n+1}{2}}-\dfrac{n+1}{2}t^{\frac{n-1}{2}}$，

$f''(t)=\dfrac{1}{4}(n^2-1)(1-t^n)t^{-\frac{n+3}{2}}\geq 0$，所以$f'(t)$单调递增，有$f'(t)<f'(1)=0$，

所以$f(t)$单调递减，则有$f(t)>f(1)=0$，不等式得证，C 正确；

对于 D 选项，取$x=2$，$y=1$，

有$x^y\cdot y^x=2<2^{\sqrt{2}}=(xy)^{\sqrt{xy}}$，D 错误.

二、多选题

9. 【答案】AD【解析】$AB_1//DC_1$，$DC_1//D_1C$

$\therefore AB_1\perp D_1C$，即$AB_1\perp D_1E$

$\because A_1D_1\perp$平面ABB_1A_1

$\therefore A_1D_1\perp AB_1$

$A_1D_1\cap D_1E=D_1$，$A_1D_1,D_1E\subset$平面A_1D_1E

$\therefore AB_1\perp$平面A_1D_1E，A 正确；

以B_1为坐标原点建系，$\overrightarrow{D_1E}=\lambda\overrightarrow{D_1C}$

$\therefore E(1-\lambda,1,\lambda)$

$DE=\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$

$A_1E=\sqrt{\lambda^2+1+\lambda^2}=\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{2}}$

$\sqrt{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$表示$M(\lambda,0)$与$N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$的距离

$\sqrt{\lambda^2+\frac{1}{2}}$表示$M(\lambda,0)$与$N\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$的距离

$DE+A_1E=\sqrt{2}(MN+MP)\geq\sqrt{2}PN\quad=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\neq\sqrt{2}+1$，B 错

若$DE\perp A_1D$

则$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0$，即$(-\lambda,0,\lambda-1)(0,1,1)=0\Rightarrow\lambda=1$

此时C与E重合，矛盾，C 错误

$DC_1\perp$平面A_1D_1C,

$\therefore D$到平面A_1D_1E的距离$d=\frac{1}{2}DC_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，D 正确

故选 AD.

10.【答案】BC【解析】$A(1,\sqrt{3})$，即A为$\frac{\pi}{3}$角终边上一点

$B\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right),2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)$

$\therefore x_0=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right),y_0=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$f(\theta)=x_0+y_0=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}-\theta+\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}-\theta\right)$，A 正确

$\theta=\frac{\pi}{3}$时，$f(\theta)=2$，$g(\theta)=0$，都为正数，B 错误

$f^2(\theta)-8g(\theta)=(x_0+y_0)^2-16x_0y_0=x_0^2+y_0^2+2x_0y_0-16x_0y$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\theta\right)=4-14\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$=4-28\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)\neq2$，C 错误

$g(\theta)=2\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)$

$-\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}-2\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{7\pi}{12}$

$\therefore g(\theta)$在$\left(\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right)$单调减

$-\pi<\frac{\pi}{12}-\theta<0\Rightarrow\frac{\pi}{12}<\theta<\frac{13\pi}{12}$

$\therefore f(\theta)$在$\left(\frac{\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right)$单调减

$\therefore a=\frac{\pi}{12}$，$b=\frac{7\pi}{12}$时，$f(\theta)$与$g(\theta)$都在$(a,b)$上单调减，D 正确，

注意：本题选错误的答案，故本题 BC.

11.【答案】AC【解析】当$n=1$时，有$L_1=1=2F_1-F_0$，

假设$n\le k(k\ge2)$时，有$L_n=2F_n-F_{n-1}$，

则$n=k+1$时，

有$L_{k+1}=L_k+L_{k-1}=2F_k-F_{k-1}+2F_{k-1}-F_{k-2}=F_k+2F_{k-1}=F_{k+1}+F_{k-1}=2F_{k+1}-F_k$，成立，

由数归法，则可知$L_n=2F_n-F_{n-1}$（$n\ge 1$）成立，A 正确；

由$F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2=\left(F_{n+1}+F_n\right)F_n-F_{n+1}^2=F_n^2-F_{n+1}\left(F_{n+1}-F_n\right)=F_n^2-F_{n+1}F_{n-1}$

所以$\dfrac{F_{n+2}F_n-F_{n+1}^2}{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2}=1$，又$F_2F_0-F_1^2=1$，

则可知$\left\{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\right\}$是以 1 为首项，$-1$为公比的等比数列，B 错误；

由$L_{2k+1}-L_{2k-1}=L_{2k}$，

则有$\sum_{k=0}^{n}L_{2k}=L_0+\sum_{k=1}^{n}(L_{2k+1}-L_{2k-1})=L_{2n+1}-L_1+L_0=L_{2n+1}+1$，C 正确；

取$n=1$，则$5F_3=15$，$L_1^2+L_2^2=10$，有$L_1^2+L_2^2\ne 5F_3$，D 错误.

12.【答案】BD【解析】依题意有$f'(x)=\ln x-a+1$，

所以$f(x)$在$\left(0,e^{a-1}\right)$单调递减，在$\left(e^{a-1},+\infty\right)$单调递增，

又$g'(x)=\dfrac{1+a-x}{e^x}$，所以$g(x)$在$(-\infty,a+1)$单调递增，在$(a+1,+\infty)$单调递减，

（i）若$e^{a-1}\ge e$，即$a\ge 2$，有$f(x)$在$[1,e]$单调递减，则$f(x)\in\left[\left(1-a\right),-a\right]$，

而$a+1>1$，则$g(x)$在$[-1,1]$单调递增，则$g(x)\in\left[-e\left(1+a\right),\dfrac{1-a}{e}\right]$，

易知有$-e(1+a)<e(1-a)$，$\dfrac{1-a}{e}>-a$，符合题意；

（ii）若$e^{a-1}\le 1$，即$a\le 1$，有在$[1,e]$单调递增，则$f(x)\in\left[-a,e\left(1-a\right)\right]$，

（1）若$0\le a\le 1$，则$g(x)$在$[-1,1]$单调递增，则$g(x)\in\left[-e(1+a),\dfrac{1-a}{e}\right]$，

有$-e(1+a)<-a$，只需$\dfrac{1-a}{e}\ge e(1-a)$，得$a=1$；

（2）若$a\le -2$，则$g(x)$在$[-1,1]$单调递减，则$g(x)\in\left[\dfrac{1-a}{e},-e\left(1+a\right)\right]$，

有$-e(1+a)<e(1-a)$，不符合；

（3）若$-2<a<0$，有$g(x)_{\max}=g(a+1)=\dfrac{1}{e^{a+1}}<e<e(1-a)$，不符合；

（iii）若$1<a<2$，有$f(x)_{\min}=f\left(e^{a-1}\right)=-e^{a-1}$，$f(x)_{\max}=\max\left\{e(1-a),-a\right\}$，

而$a+1>1$，则$g(x)$在$[-1,1]$单调递增，则$g(x)\in\left[-e(1+a),\dfrac{1-a}{e}\right]$，

又有$-e^{a-1}>-e>-e(1+a)$，$\dfrac{1-a}{e}>\max\left\{e(1-a),-a\right\}$，符合题意；

综上可知$a\geq 1$，所以选：BD.

三、填空题

13.【答案】136【解析】$\mu=90,\sigma=5$

$95=90+5=\mu+\sigma$，$100=90+10=\mu+2\sigma$

$$P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)=\frac{P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)-P(\mu\sigma<X<\mu+\sigma)}{2}=0.1359$$

$1000\times 0.1359=135.9\approx 136$.

14.【答案】$\dfrac{2369}{2048}$【解析】$a_1=1,a_2=2$

$a_3=2a_1^2=2\times 1=2$

$a_4=2a_1^2a_2^2=2\times 2^2=2^3$

$a_5=2a_1^2a_2^2a_3^2=2\times 1\times 2^2\times 2^2=2^5$

$a_6=2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2=2\times 1\times 2^2\times 2^2\times 2^6=2^{11}$

$a_7=2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2=2\times 1\times 2^2\times 2^2\times 2^6\times 2^{10}=2^{21}$

$a_8=2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2a_6^2=2^{21}\times 2^{22}=2^{43}$

$$\frac{a_3^2}{a_4a_1^2}+\frac{a_4^2}{a_5a_2^2}+\frac{a_5^2}{a_6a_3^2}+\frac{a_6^2}{a_7a_4^2}+\frac{a_7^2}{a_8a_5^2}=\frac{2^2}{2^3}+\frac{2^6}{2^5\cdot 2^2}+\frac{2^{10}}{2^{11}\cdot 2^2}+\frac{2^{22}}{2^{21}\cdot 2^6}+\frac{2^{42}}{2^{43}\cdot 2^{10}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^{11}}=\frac{2369}{2^{11}}=\frac{2369}{2048}.$$

15.【答案】$y=-2x+24$；90【解析】依题意有$\angle AOC=\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，

则$k_{OA}k_{OC}=\dfrac{2y_2}{x_2}=\dfrac{8}{y_2}=-1$，得$y_2=-8$，

又有$k_{AB}=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，

$k_{BC}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}=\dfrac{4}{y_1-8}$，

所以$\dfrac{4}{y_1+2}\cdot\dfrac{4}{y_1-8}=-1$，解得$y_1=6$或$y_1=0$（舍），

故可知$B(9,6)$，$C(16,-8)$，

则有直线BC的方程为$y=-2x+24$；

易知$OA=\sqrt{5}$，$OC=8\sqrt{5}$，$AB=4\sqrt{5}$，$BC=7\sqrt{5}$，

所以$S_{四边形OABC}=\dfrac{1}{2}\left(OA\times OC+AB\times BC\right)=90$.

16.【答案】±4【解析】由$\cos^2A+\cos^2B=1$，

即$\dfrac{1}{1+\tan^2A}+\dfrac{1}{1+\tan^2B}=1$，

所以$2+\tan^2A+\tan^2B=\left(1+\tan^2A\right)\left(1+\tan^2B\right)$，

可得$\tan A\tan B=\pm1$，

又$\sin2A+\sin2B+\sin2C=2\sin\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)=4\sin A\sin B\sin C$，

所以$\dfrac{\sin2A+\sin2B+\sin2C}{\sin C\cos A\cos B}=\dfrac{4\sin A\sin B\sin C}{\sin C\cos A\cos B}=4\tan A\tan B=\pm4$.

四、解答题

17.【解析】（1）由$S_1+a_1=1$，得$a_1=\dfrac{1}{2}$，

又$\begin{cases}S_n+a_n=1\\S_{n+1}+a_{n+1}=1\end{cases}$，作差得$2a_{n+1}-a_n=0$，

所以$\{a_n\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列，

则有$a_n=\dfrac{1}{2^n}$；

（2）由$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\dfrac{2^{n+1}}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=2\left(\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}\right)$，

所以有$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sum\limits_{k=1}^{n}2\left(\dfrac{1}{2^k+1}-\dfrac{1}{2^{k+1}+1}\right)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{2^{n+1}+1}$.

18.【解析】（1）记$|BC|=a$，$|CA|=b$，$|AB|=c$，则有$c=a\cos A+b\cos B$，

又有$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$，

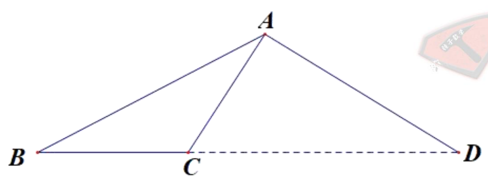
由正弦定理有$c=a\cos B+b\cos A$，

所以$a\cos B+b\cos A=a\cos A+b\cos B$，

即$(a-b)(\cos B-\cos A)=0$，

则有$a=b$或$\cos A=\cos B$，故可知ΔABC为等腰三角形；

（2）由（1）可知$A=B$，故$\angle C>\dfrac{\pi}{2}$，作出如下图：



记$|AC|=|BC|=t$，$\angle ACB=\theta$，

则有$\cos\theta=-\cos\angle ACD=-\dfrac{t}{2}$，

由余弦定理有$|AB|^2=t^2+t^2-2t^2\cos\theta=2t^2+t^3$，

又$t^2=|AC|\cdot|BC|$，$|BD|=|BC|+|CD|=t+2$，

所以$|AB|^2=t^2(2+t)=|AC|\cdot|BC|\cdot|BD|$，

则有$\dfrac{|AB|^2}{|AC|\cdot|BC|\cdot|BD|}=1$为定值.

19.【解析】（1）记在经过4回合比赛，甲获胜为事件A，

可知甲在第4回合胜，前3回合胜2场，所以$P(A)=\dfrac{3}{4}\times C_3^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{81}{256}$；

（2）易知 X 的取值为 0，1，2，3，4，且 $X \sim B\left(4, \frac{3}{4}\right)$，

$P(X=0)=C_4^0\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$，$P(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$，

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$，$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$，

$P(X=4)=C_4^4\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{256}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{81}{256}$

数学期望 $E(X)=np=4\times\frac{3}{4}=3$.

20.【解析】（1）由 $AB=AC$，则有 $A_1B_1=A_1C_1$，又 D 为 B_1C_1 的中点，所以 $A_1D\perp B_1C_1$，

由 $BC=2$，则有 $B_1D=1$，$BB_1=2$，

又 $\angle C_1B_1B=\angle BCC_1=\frac{\pi}{3}$，

所以 $BD=\sqrt{B_1B^2+B_1D^2-2B_1B\cdot B_1D\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$，

则可知 $BD\perp B_1C_1$，

又有 $A_1D\cap BD=D$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 A_1DB；

（2）取 BC 中点为 E，连结 AE，C_1E，

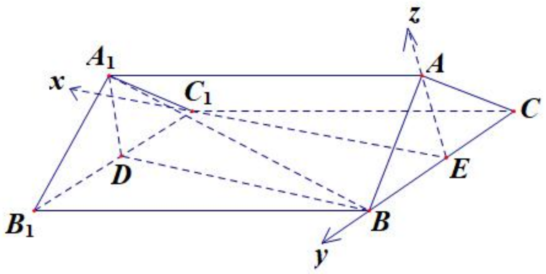
由 $AB\perp AC$，则有 $AE=\frac{1}{2}BC=1$，

又易知 $C_1E=BD=\sqrt{3}$，

则有 $AE^2+C_1E^2=4=AC_1^2$，所以 $AE\perp C_1E$，

又可知 $AE\perp BC$，$AE\cap C_1E=E$，则 $AE\perp$ 平面 BB_1C_1C，

如图，以 E 为坐标原点，C_1E，BE，AE 分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，



有$C(0,-1,0)$，$B_1(\sqrt{3},2,0)$，$A_1(\sqrt{3},1,1)$，$B(0,1,0)$，$D(\sqrt{3},1,0)$，

由$A_1D//AE$，则有$A_1D\perp$平面BB_1C_1C，

所以$A_1D\perp BD$，

又$BD\perp B_1C_1$，$A_1D\cap B_1C_1=D$，

所以$BD\perp$平面$A_1B_1C_1$，

所以平面$A_1B_1C_1$的法向量为$\overrightarrow{BD}=(\sqrt{3},0,0)$，

设平面A_1B_1C的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则有$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}x+3y=0\\ \sqrt{3}x+2y+z=0\end{cases}$，

可取$\vec{n}=(-3,\sqrt{3},\sqrt{3})$，

记二面角$C_1-A_1B_1-C$为θ，

则有$\cos\theta=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{BD}|}\right|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

故有二面角$C_1-A_1B_1-C$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

21.【解析】(1)设ΔABC的外心为O_1，半径为R，则有$R=\dfrac{AB}{2\sin\angle ACB}=2$，

所以$OO_1=R\cos\dfrac{\pi}{3}=1$，

设$C(x,y)$，$H(x_0,y_0)$，有$O_1C=R$，即有$x^2+(y-1)^2=4(y\neq 0)$，

由$CH\perp AB$，则有$x_0=x$，

由$AH\perp BC$，则有$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(x_0+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)+y_0y=0$，

所以有$y_0=-\dfrac{\left(x_0+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}{y}=\dfrac{3-x^2}{y}=\dfrac{(y-1)^2-1}{y}=y-2$，

则有$x_0^2+(y_0+1)^2=4(y_0\neq -2)$，

所以ΔABC垂心H的轨迹方程为$x^2+(y+1)^2=4(y\neq -2)$；

（2）记点$(0,-1)$到直线l的距离为d，则有$d=\dfrac{|m+1|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以$|DE|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{4-\dfrac{(m+1)^2}{1+k^2}}$，

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\2x^2+y^2=1\end{cases}$，有$(2+k^2)x^2+2kmx+m^2-1=0$，

所以$\Delta=4(k^2+2-2m^2)>0$，

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2+k^2}=\dfrac{2\sqrt{(1+k^2)(k^2+2-2m^2)}}{2+k^2}$，

由$|DE|=2|PQ|$，

可得$4-\dfrac{(m+1)^2}{1+k^2}=\dfrac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+2}-\dfrac{8m^2\left(k^2+1\right)}{\left(2+k^2\right)^2}\leq\dfrac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+2}-\dfrac{8m^2}{\left(k^2+2\right)^2}$，

所以$\dfrac{4}{k^2+2}+\dfrac{8m^2}{\left(2+k^2\right)^2}\leq\dfrac{(m+1)^2}{k^2+1}$，

即有$\dfrac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+2}+\dfrac{8\left(k^2+1\right)m^2}{(2+k^2)^2}\leq(m+1)^2$，

所以$2+2m^2-\dfrac{4\left(k^2+1\right)}{k^2+2}-\dfrac{8\left(k^2+1\right)m^2}{\left(k^2+2\right)^2}\geq(m-1)^2$，

即$\dfrac{2k^2}{k^2+2}\left(\dfrac{k^2m^2}{k^2+2}-1\right)=(m-1)^2\Rightarrow\dfrac{k^2m^2}{k^2+2}-1\geq 0\Rightarrow m^2\geq 1+\dfrac{2}{k^2}$

又$\Delta>0$，可得$m^2<1+\dfrac{k^2}{2}$，

所以$1+\frac{2}{k^2}<1+\frac{k^2}{2}\Rightarrow\frac{k^2}{2}>\frac{2}{k^2}$，故$|k|>\sqrt{2}$.

22.【解析】(1)当$a=0$时，$f(x)=\sin x-x\cos x$，

有$f'(x)=x\sin x\geq 0$，

所以$f(x)$单调递增，有$f(x)\geq f(0)=0$；

(2)由$f'(x)=x\left[(1-2a)\sin x-ax\cos x\right]$，

依题意有$f'(\pi)=\pi a\geq 0$，得$a\geq 0$，

当$a=0$，由(1)可知$f(x)$单调递增，符合；

当$a>0$，(i)若$\frac{1}{a}-2\geq 1$，即$0<a\leq\frac{1}{3}$，

由(1)可知$f'(x)=ax\left[\left(\frac{1}{a}-2\right)\sin x-x\cos x\right]\geq ax(\sin x-x\cos x)\geq 0$，

所以$f(x)$单调递增，符合；

(ii)若$a>\frac{1}{3}$，$0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$，

记$g(x)=\left(\frac{1}{a}-2\right)\sin x-x\cos x$，有$g'(x)=\left(\frac{1}{a}-3\right)\cos x+x\sin x$，

$g''(x)=\left(4-\frac{1}{a}\right)\sin x+x\cos x>0$，

所以$g'(x)$单调递增，又$g'(0)=\frac{1}{a}-3<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$，

故可知$g'(x)$有唯一零点，记为x_0，

所以$0\leq x<x_0$，有$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，所以$g(x)\leq g(0)=0$，

所以$f'(x)=axg(x)\leq 0$，$f(x)$单调递减，不符合；

综上可知$0\leq a\leq\frac{1}{3}$；

(3)取$a=\frac{1}{3}$，由(2)可知$f(x)$单调递增，有$f(x)\geq f(0)=0$，

则$0<x<1$，有$\sin x - x\cos x - \frac{1}{3}x^2\sin x > 0$，可得$\tan x > \frac{3x}{3-x^2}$，

取$x = \frac{\sqrt{3}}{k}(k \geq 2)$，则有$\tan\frac{\sqrt{3}}{k} > \frac{\sqrt{3}k}{k^2-1}$，

所以$\frac{k}{\sqrt{3}}\tan\frac{\sqrt{3}}{k} > \frac{k^2}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{k^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$，

所以$\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{3}}\tan\frac{\sqrt{3}}{k} > \sum_{k=2}^{n}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\right]$

$= n - 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = n - \frac{2n+1}{2n(n+1)} - \frac{1}{4}$，

故不等式得证.