保密★启用前

2021年高考方向卷A

锤子数学命题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid a^2x+y-a=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数为

A.2　　B.1　　C.0　　D.无法确定

2. 棣莫弗定理由法国数学家棣莫弗（1667-1754年）创立.指的是设两个复数（用三角函数形式表示）$z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$，$z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$，则 $z_1z_2=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$，已知 $z_1=\cos\frac{7\pi}{13}+i\cos\frac{\pi}{26}$，$z_2=\cos\frac{15\pi}{13}+i\sin\frac{11\pi}{13}$，则 z_1z_2 在复平面内所表示的点位于

A.第二象限　　B.第一象限　　C.第四象限　　D.第三象限

3. $\left(x^2+2y\right)\left(1+y-x\right)^5$ 展开式中 x^3y^4 的系数是

A.10　　B.-5　　C.5　　D.-10

4. 惊艳全世界的南非双曲线大教堂是由伦敦著名的建筑事务所steyn studio完成的，建筑师的设计灵感源于圣经的经文“上帝啊，你永无止境的爱是多么的珍贵，人们在你雄伟的翅膀下避难”.若将如图所示的双曲线大教堂外形弧线的一段近似看成双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）下支的一部分，且此双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，过点 $(1,-2)$，则此双曲线的方程为

A. $y^2-2x^2=2$　　B. $2y^2-3x^2=5$　　C. $2y^2-x^2=4$　　D. $y^2-x^2=3$

5. 已知定义在R的函数满足 $f(x)=f(4-x)$，$f(x+2)+f(-x)=4$，则下列结论正确的是

A. $f(x)$不是周期函数

B. $f(x)$是奇函数

C. 对任意$n \in \mathrm{Z}$，恒有$f(4n+1)$为定值

D. 对任意$n \in \mathrm{N}^*$，有$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(2n-1)=n$

6. 世界读书日全称为世界图书与版权日，又称“世界图书日”，最初的创意来自于国际出版商协会.1995 年正式确定每年 4 月 23 日为“世界图书与版权日”，设立目的是推动更多的人去阅读和写作，希望所有人都能尊重和感谢为人类文明做出过巨大贡献的文学、文化、科学、思想大师们，保护知识产权.每年的这一天，世界 100 多个国家都会举办各种各样的庆祝和图书宣传活动.在 2021 年 4 月 23 日这一天，某高校中文系为了解本校学生每天的课外阅读情况，随机选取了 200 名学生进行调查，其中女生有 120 人.根据调查结果绘制了如下学生日均课外阅读时间（单位：分钟）的频数分布表.

分组（时间：分钟）	频数	频率
[0，10)	50	0.25
[10，20)	20	0.1
[20，30)	50	0.25
[30，40)	60	0.3
[40，50)	12	0.06
[50，60]	8	0.04

将日均课外阅读时间在[30，60]内的学生评价为“课外阅读时间合格”，已知样本中“课外阅读时间合格”的学生中有 20 男生.那么下列说法正确的是

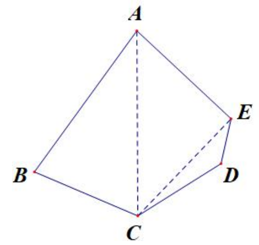
A. 该校学生“课外阅读时间”的平均值约为 26 分钟

B. 按分层抽样的方法，从样本中“课外阅读时间不合格”的学生抽取 10 人，再从这 10 人中随机抽取 2 人，则这 2 人恰好是一男一女的概率为$\dfrac{5}{9}$

C. 样本学生“课外阅读时间”的中位数为 24 分钟

D. 若该校有 10000 名学生，估计“课外阅读时间合格”的女生有 3500 人

7. 如图所示，在凸五边形 $ABCDE$ 中，有 $BC=CD=2$，$DE=1$，$AB=3$，$AE=\frac{5}{2}$，且 $AE\perp CE$，则 $\left(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{EA}=$



A. $\frac{55}{16}$　　B. $\frac{53}{8}$

C. $\frac{59}{16}$　　D. $\frac{57}{8}$

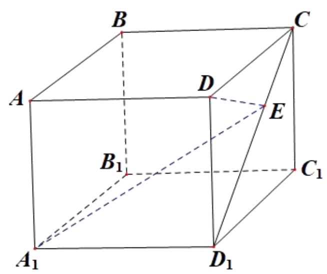
8. 已知 $x>y>0$，$n\in\mathrm{N}^*$，则下列结论正确的是

A. $\sin\frac{y}{x}<\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　B. $x^2+y^2-xy-\sqrt{2}x+1$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

C. $\frac{x^n-y^n}{x-y}\geq nx^{\frac{n-1}{2}}\cdot y^{\frac{n-1}{2}}$　　D. $x^y\cdot y^x\geq\left(xy\right)^{\sqrt{xy}}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为线段 CD_1 上一动点（不包含端点），则下列说法正确的有



A.　$AB_1\perp$ 平面 A_1D_1E

B.　$DE+A_1E$ 的最小值为 $1+\sqrt{2}$

C.　存在点 E 使得 $DE\perp A_1D$

D.　点 D 到平面 A_1D_1E 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

10.在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A\left(1,\sqrt{3}\right)$，若将点 A 绕原点按顺时针旋转 θ 弧度，得到点 $B(x_0,y_0)$，记 $f(\theta)=x_0+y_0$，$g(\theta)=2x_0y_0$，则下列结论错误的有

A. $f(\theta)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}-\theta\right)$

B.不存在 θ，使得 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 均为整数

C. $f^2(\theta)-8g(\theta)=2$

D.存在某个区间(a,b)（$a<b$），使得$f(\theta)$与$g(\theta)$的单调性相同

11.数学史上有很多著名的数列，在数学中有着重要的地位.13 世纪初意大利数学家斐波那契从兔子繁殖问题引出的一个数列$\left\{F_n\right\}$：1，1，2，3，5，8，13，……，称之为斐波那契数列，满足$F_0=1$，$F_1=1$，$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$（$n\geq 1$）.19 世纪法国数学家卢卡斯提出数列$\left\{L_n\right\}$：2，1，3，4，7，11，18，……，称之为卢卡斯数列，满足$L_0=2$，$L_1=1$，$L_{n+1}=L_n+L_{n-1}$（$n\geq 1$）.那么下列说法正确的有

A. $L_n=2F_n-F_{n-1}$（$n\geq 1$）　　B. $\left\{F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2\right\}$不是等比数列

C. $L_0+L_2+\cdots+L_{2n}=L_{2n+1}+1$　　D. $L_n^2+L_{n+1}^2=5F_{2n+1}$

12.已知函数$f(x)=x(\ln x-a)$，$g(x)=\dfrac{x-a}{e^x}$，若对任意的$x_1\in[1,e]$，均存在$x_2\in[-1,1]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$，则a的取值可能是

A.0　　B.2　　C.-3　　D.1

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.某高中有 1000 名高三学生，学生们的数学成绩X服从正态分布$N(90,25)$，那么数学成绩满足$95<X<100$的学生人数大约有_________（保留整数）.

参考数据：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$

14.已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=2a_1^2a_2^2\cdots a_n^2$，$a_1=1$，$a_2=2$，则下列表达式$\dfrac{a_3^2}{a_4a_1^2}+\dfrac{a_4^2}{a_5a_2^2}+\dfrac{a_5^2}{a_6a_3^2}+\dfrac{a_6^2}{a_7a_4^2}+\dfrac{a_7^2}{a_8a_5^2}$的值为_________.

15.在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y^2=4x$上不同的三点$A(1,2)$，$B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，满足$AB\perp BC$，$y_1y_2\neq 0$，且O，A，B，C四点共圆，则直线BC的方程是_________；四边形$OABC$的面积为_________.

16.在ΔABC中，满足$\cos^2A+\cos^2B=1$，则$\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin C\cos A\cos B}=$_________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n+a_n=1$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$b_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

18.（12 分）在钝角ΔABC中，三个内角为A，B，C，满足$|AB|=|BC|\cdot\cos A+|AC|\cdot\cos B$.

（1）证明：ΔABC是等腰三角形；

（2）若延长BC至D点，使得$AD\perp AC$，且$CD=2$，求证：$\dfrac{|AB|^2}{|AC|\cdot|BC|\cdot|BD|}$为定值.

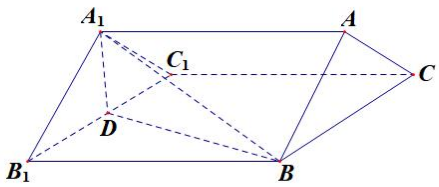
19.（12 分）羽毛球是一项隔着球网，使用长柄网状球拍击打用羽毛和软木刷制作而成的一种小型球类的室内运动项目.羽毛球比赛的计分规则：采用 21 分制，即双方分数先达 21 分者胜，3 局 2 胜.每回合中，取胜的一方加 1 分.每局中一方先得 21 分且领先至少 2 分即算该局获胜，否则继续比赛；若双方打成 29 平后，一方领先 1 分，即算该局取胜.某次羽毛球比赛中，甲选

手在每回合中得分的概率为$\dfrac{3}{4}$，乙选手在每回合中得分的概率为$\dfrac{1}{4}$.

（1）在一局比赛中，若甲、乙两名选手的得分均为 18，求在经过 4 回合比赛甲获胜的概率；

（2）在一局比赛中，记前 4 回合比赛甲选手得分为X，求X的分布列及数学期望$E(X)$.

20.（12 分）如图所示，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$AB=AC$，四边形BCC_1B_1为菱形，$BC=2$，$\angle BCC_1=\dfrac{\pi}{3}$，$D$为$B_1C_1$的中点.



（1）证明：$B_1C_1\perp$平面A_1DB；

（2）若$AC_1=2$，求二面角$C_1-A_1B_1-C$的余弦值.

21.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，$A\left(-\sqrt{3},0\right)$，$B\left(\sqrt{3},0\right)$，$C$ 是满足 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$ 的一个动点.

（1）求 ΔABC 垂心 H 的轨迹方程；

（2）记 ΔABC 垂心 H 的轨迹为 Γ，若直线 $l:y=kx+m$（$km\neq 0$）与 Γ 交于 D，E 两点，与椭圆 $T:2x^2+y^2=1$ 交于 P，Q 两点，且 $\left|DE\right|=2\left|PQ\right|$，求证：$|k|>\sqrt{2}$.

22.（12 分）已知函数 $f(x)=\sin x-x\cos x-ax^2\sin x$，其中 $x\in[0,\pi]$，$a\in\mathrm{R}$.

（1）若 $a=0$，证明：$f(x)\geq 0$；

（2）若 $f(x)$ 单调递增，求 a 的取值范围；

（3）当 $n\geq 2$ 且 $n\in\mathrm{N}^*$ 时，证明：$\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{3}}\tan\frac{\sqrt{3}}{k}>n-\frac{2n+1}{2n(n+1)}-\frac{1}{4}$.