



21 届河北省高三年级 11 月份联合考试

数 学

考生注意:

1. 本试卷共 150 分. 考试时间 120 分钟.
2. 请将各题答案填写在答题卡上.
3. 本试卷主要考试内容: 集合与常用逻辑用语, 函数, 导数, 三角函数, 向量, 数列, 不等式, 立体几何.

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \ln(x-2) \geq 0\}$, $B = \{x | 2x^2 - 9x - 5 < 0\}$, 则 $A \cap B =$
 A. $(2, 5)$ B. $[2, 5)$ C. $[3, 5)$ D. $(3, 5)$
2. 在公比为 q 的正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 a_3 = 9$, $a_3 + 2q = 10$, 则 $q =$
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
3. 函数 $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ 的图象在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线斜率为
 A. 4 B. -4 C. 2 D. -2
4. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 则“ $x \geq 1$ 且 $y \geq 1$ ”是“ $x^2 + y^2 \geq 1$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是正方形 CDD_1C_1 的中心, 点 Q 在线段 AA_1 上, 且 $AQ = \frac{1}{3}AA_1$, E 是 BC 的中点, 则异面直线 PQ, DE 所成角的大小为
 A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
6. 已知 $\frac{\sin 2\alpha + 2\sin^2 \alpha}{1 + \tan \alpha} = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in (0, \pi)$, 则 $\cos \alpha - \sin \alpha =$
 A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
7. 如图, 战国商鞅铜方升是公元前 344 年商鞅督造的标准量器. 秦始皇统一中国后, 仍以商鞅所规定的制度和标准统一全国的度量衡. 经测量, 该铜方升内口(长方体)深 1 寸, 内口长是宽的 1.8 倍, 内口的表面积(不含上底面)为 33 平方寸, 则该铜方升内口的容积为
 A. 5.4 立方寸 B. 8 立方寸
 C. 16 立方寸 D. 16.2 立方寸
8. 已知 $\triangle ABC$ 所在的平面内一点 P (点 P 与点 A, B, C 不重合), 且 $\overrightarrow{AP} = 5\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$, 则 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BCP$ 的面积之比为
 A. 2 : 1 B. 3 : 1 C. 3 : 2 D. 4 : 3



二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{4}$ ，且

直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 是其中一条对称轴，则下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. $f(\frac{3\pi}{8}) = -\frac{1}{2}$

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}]$ 上单调递增

D. 点 $(-\frac{7\pi}{24}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心

10. 下列函数有两个零点的是

A. $f(x) = e^x - x - 1$

B. $f(x) = |x+1| - \frac{1}{2}x - 1$

C. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$

D. $f(x) = \ln x - x + 2$

11. 斐波那契螺线又叫黄金螺线，广泛应用于绘画、建筑等，这种螺线可以按

下列方法画出：如图，在黄金矩形 $ABCD$ ($\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$) 中作正方形

$ABFE$ ，以 F 为圆心， AB 长为半径作弧 $\widehat{BE}$ ；然后在黄金矩形 $CDEF$ 中作正方形 $DEHG$ ，以 H 为圆心， DE 长为半径作弧 $\widehat{EG}$ ；……；如此继续下去，这些弧就连接成了斐波那契螺线。记弧 $\widehat{BE}$ ， $\widehat{EG}$ ， $\widehat{GI}$ 的长度分别为 l, m, n ，则下列结论正确的是

A. $l = m + n$

B. $m^2 = l \cdot n$

C. $2m = l + n$

D. $\frac{1}{m} = \frac{1}{l} + \frac{1}{n}$

12. 设 $a = \log_{0.3} 0.5$ ， $b = \log_4 0.5$ ，则下列结论正确的是

A. $ab < 0$

B. $a + b > 0$

C. $2(ab+1) < a$

D. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 6$

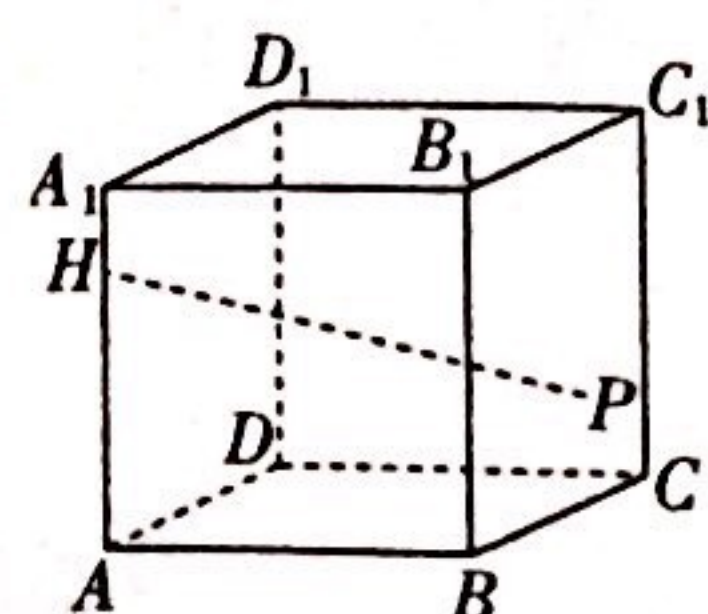
三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知正数 a, b 满足 $ab = 1$ ，则 $4a + 9b$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 3$ ， $BC = 2$ ， D 为 BC 的中点， E, F 都在线段 AB 上，且 $AE = EF = FB$ ，则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CF} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 如图，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 H 在棱 AA_1 上，且 $HA_1 = 1$ ， P 是侧面 BCC_1B_1 内一动点， $HP = \sqrt{13}$ ，则 CP 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_n = n$ ， $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则 $S_{61} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在① $a_{n+2}-a_n=4, S_2=6$, ② $a_3+a_5=16, S_3+S_5=42$, ③ $2S_n=a_n+2n^2$ 三个条件中任选一个补充在下面的问题中,并加以解答.

问题:设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , _____, 求数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 的前 n 项和.

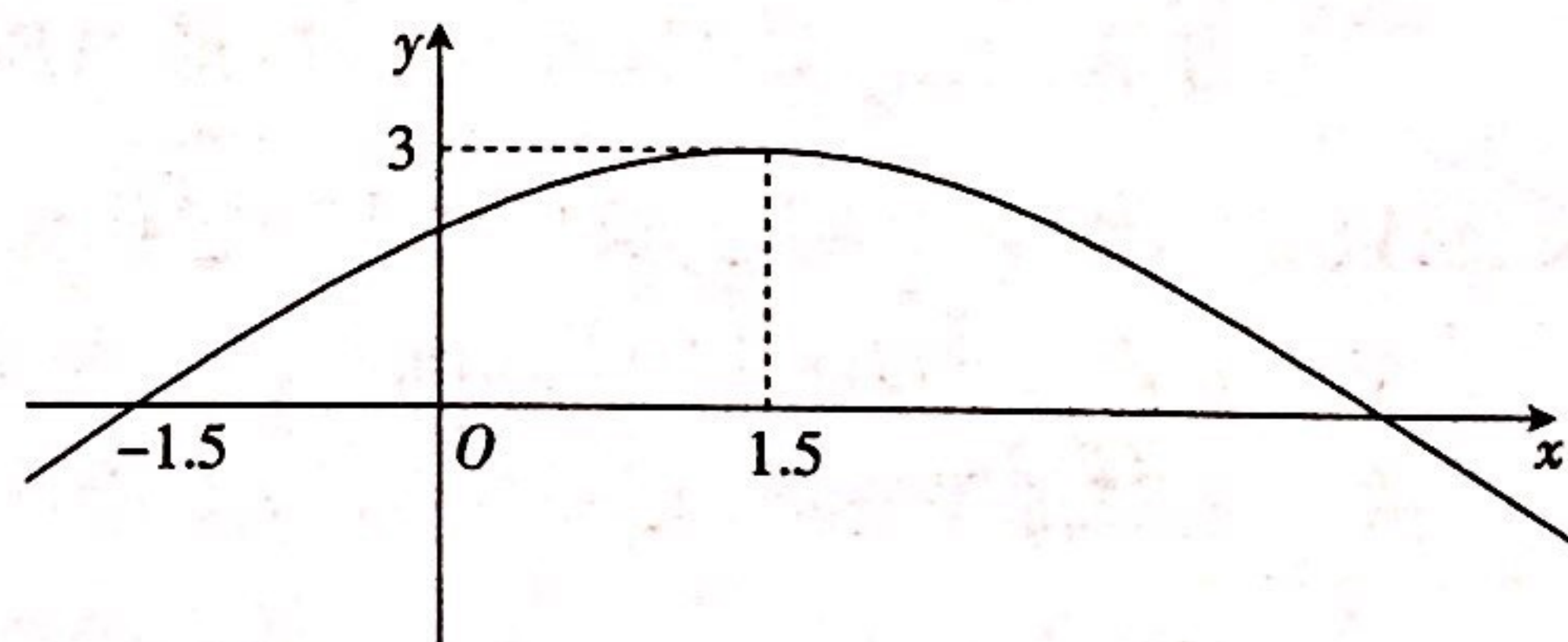
注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, 0<\varphi<\pi$) 的部分图象如图所示.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)当 $x\in[-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}]$ 时,求函数 $y=f(x)+\sqrt{3}f(x+3)$ 的最值.

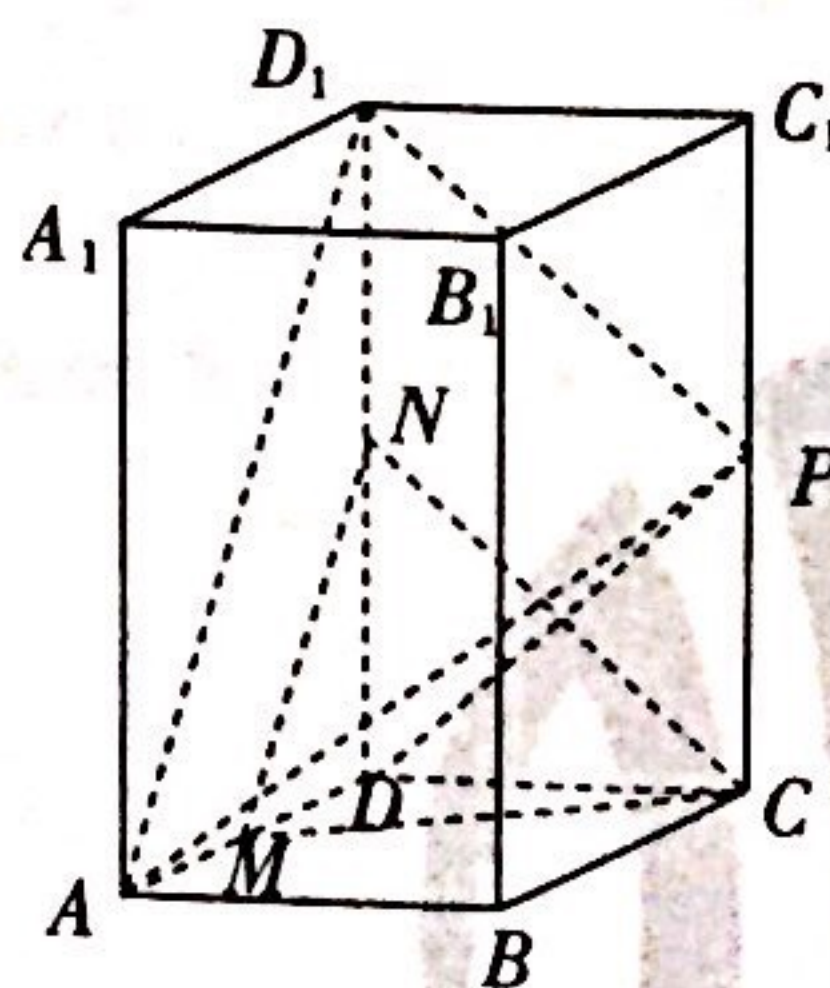


19. (12 分)

在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形, $AA_1=2AB=4$, M, N, P 分别是 AD, DD_1, CC_1 的中点.

(1)证明:平面 $MNC \parallel$ 平面 AD_1P .

(2)求直线 DP 与平面 MNC 所成角的正弦值.

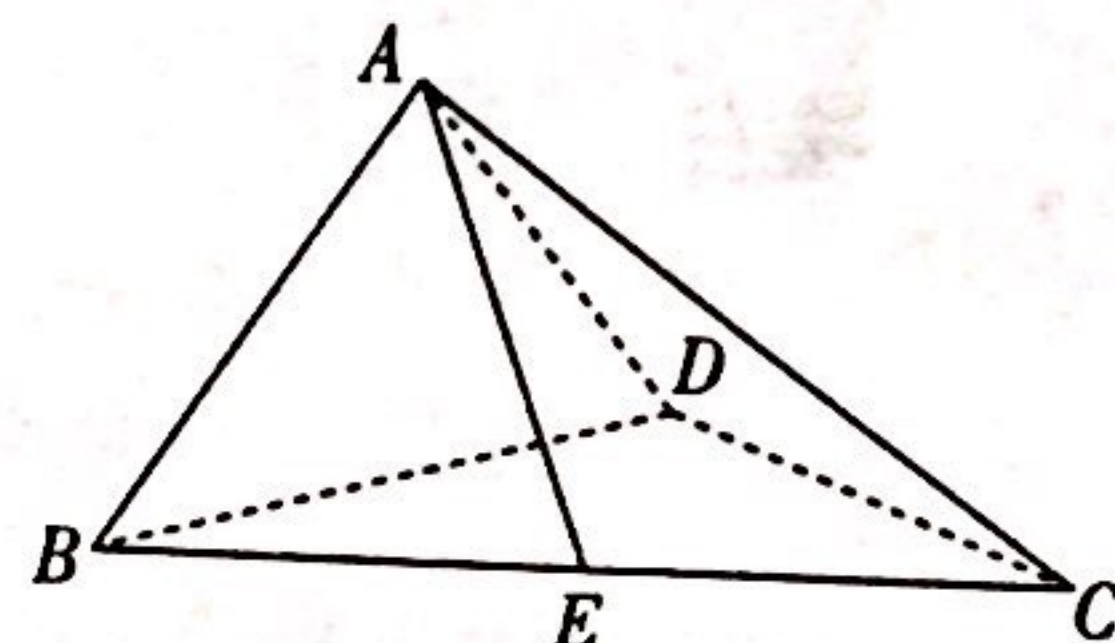


20. (12 分)

如图,在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB=AD=CD=\frac{1}{2}BC=2$, E 为 BC 的中点, $BD \perp CD$, 且 $AE = \sqrt{2}$.

(1) 证明: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABD .

(2) 求平面 ABC 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值.



21. (12 分)

已知函数 $f(x) = |3x+a| + x, x \in [1, 2], g(x) = 4^x + a \cdot 2^{x+1} + 1, x \in [1, 2]$.

(1) 若 $a \geq -3$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值与最小值之和为 10, 求 a 的值;

(2) 若对任意的 $x_1 \in [1, 2]$, 总存在 $x_2 \in [1, 2]$, 能使 $f(x_1) + g(x_2) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 设函数 $g(x) = f'(x)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > \frac{e}{2}$ 恒成立, 求 a 的取值范围.