

重庆育才中学高 2022 届高考适应性考试二

数 学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 25, 5x\}$ ， $B = \{1, x^2\}$ ，若 $A \cup B = A$ ，则实数 x 的值为

- A. 0 B. -5 C. 0 或 -5 D. 0 或 ± 5

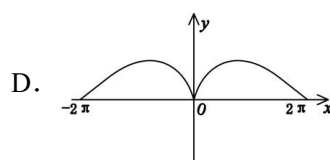
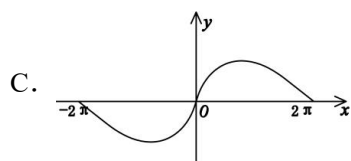
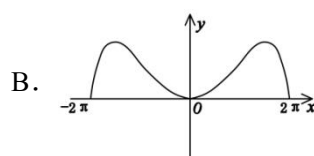
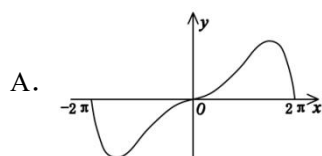
2. 已知复数 $z = \frac{1-i}{1+i}$ ，则 $\bar{z} + |z|$ 在复平面内对应的点在

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 函数 $f(x) = x - \ln \frac{1}{x} - 5$ 的零点为 x_0 ，则不等式 $x - x_0 > 2$ 的最小整数解为

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 函数 $f(x) = x^3 \cos \frac{x}{4} + \sin \frac{x}{2}$ 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的图象大致为



5. 为了衡量星星的明暗程度，古希腊天文学家喜帕恰斯在公元前二世纪首先提出了“星等”这个概念.星等的数值越小，星星就越亮，星等的数值越大它的光就越暗.到了 1850 年，由于光度计在天体光度测量的应用，英国天文学家普森又提出了亮度的概念，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述.两颗星的星等与亮度满足 $m_1 - m_2 = 2.5(\lg E_2 - \lg E_1)$ ，其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k (k=1,2)$.已知“心宿二”的星等是 1.00，“天津四”的星等是 1.25，则“心宿二”的亮度大约是“天津四”的（ ）倍.

（当 $|x|$ 较小时， $10^x \approx 1 + 2.3x + 2.7x^2$ ）

- A. 1.27 B. 1.26 C. 1.23 D. 1.22

6. 已知 a, b 为正实数, 直线 $y = x - 2a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 相切, 则 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值是

- A. 6 B. $4\sqrt{2}$ C. 8 D. $2\sqrt{2}$

7. 已知 e 是自然对数的底数, 关于 x 的方程 $e^{|x-2|} = x$ 有两个不同的解 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则

- A. $x_1 < 1, x_2 > 3$ B. $x_1 > 1, x_2 < 3$ C. $x_1 \cdot x_2 > e^2$ D. $4 < x_1 + x_2 < \frac{11}{2}$

8. 已知偶函数 $f(x)$, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, 若 $a = f(-\log_2 3)$, $b = f(2\log_3 2)$, $c = f(\frac{5}{4})$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列命题为真命题的是

- A. $\forall x \in \mathbb{R}$, 不等式 $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$
B. 若 $x > 0$, 且 $x \neq 1$, 则 $\lg x + \log_x 10 \geq 2$
C. 命题“若 $a > b > 0$, 且 $c < 0$, 则 $\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$ 的逆否命题”
D. 若命题“ $p \vee q$ ”为假命题, 则 p, q 均为假命题

10. 已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + |x|$, 则下列结论正确的是

- A. $f(x)$ 是奇函数 B. $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增
C. 若 $x \neq 0$, 则 $f(x + \frac{1}{x}) > e^2 + 2$ D. 若 $f(x-1) < f(-1)$, 则 $0 < x < 2$

11. 已知函数 $f(x) = -\frac{x}{x+1}$, 则函数具有下列性质

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1, -1)$ 对称 B. 函数 $f(x)$ 在定义域内是减函数
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

12. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且存在非零常数 T , 对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(x+T) = f(x) + T$, 则称 $f(x)$ 为类周期函数, T 为 $f(x)$ 的类周期. 则

- A. 函数 $f(x) = -x$ 为类周期函数
B. 函数 $f(x) = 2^x$ 为类周期函数
C. 若函数 $f(x)$ 为类周期函数, 则函数 $F(x) = f(x) - x$ 为周期函数
D. 若函数 $f(x) = \sin x + kx$ 为类周期函数, 则常数 $k = 1$

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知幂函数 $f(x) = (a^2 - 3a - 3)x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 为增函数, 则实数 a 的值为_____.

14. 请写出一个同时满足下列三个条件的函数 $f(x)$: _____.

① $f(x)$ 是偶函数; ② $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; ③ $f(x)$ 的值域是 $(0, +\infty)$.

15. 已知 $f(x) = \ln(2-x)$, 把 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位, 再把图象上每一点的横坐标缩短一半 (纵坐标不变) 得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = 1 + x(e^{ax} - \frac{ax+2}{2})(a < 0)$. 若存在 $x_0 > 1$, 使得 $2f(x_0) < a$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1 \neq 0$, $S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^2 (n \in N^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知数列 $\{b_n\}$ 满足: $\log_2 b_n = a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

18. (12 分)

在三角形 ABC 中, $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = \sqrt{37}, b = 3, \angle A = 120^\circ$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) $\angle A$ 的角平分线交边 BC 于点 D , 求 AD 的长.

19. (12 分)

随着城市规模的扩大和人们生活水平的日益提高, 某市近年机动车保有量逐年递增. 根据机动车管理部门的统计数据, 以 5 年为一个研究周期, 得到机动车每 5 年纯增数据情况为:

年度周期	1995~2000	2000~2005	2005~2010	2010~2015	2015~2020
时间变量 x_i	1	2	3	4	5
纯增数量 y_i (单位: 万辆)	3	6	9	15	27

其中 $i = 1, 2, 3, \dots$, 时间变量 x_i 对应的机动车纯增数据为 y_i , 且通过数据分析得到时间变量 x 与对应的机动车纯增数量 y (单位: 万辆) 具有线性相关关系.

(1) 求机动车纯增数量 y (单位: 万辆) 关于时间变量 x 的回归方程, 并预测 2025~2030 年间该市机动车纯增数量的值;

附: 回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + a$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}; \quad a = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}.$$

(2) 该市交通管理部门为了了解市民对“单双号限行”的赞同情况，随机采访了 200 名市民，将他们的意见和是否拥有私家车情况进行了统计，得到如下的 2×2 列联表：

	赞同限行	不赞同限行	合计
没有私家车	85	15	100
有私家车	75	25	100
合计	160	40	200

根据上面的列联表判断，能否有 95% 的把握认为“对限行的意见与是否拥有私家车”有关。

附： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ， $n = a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

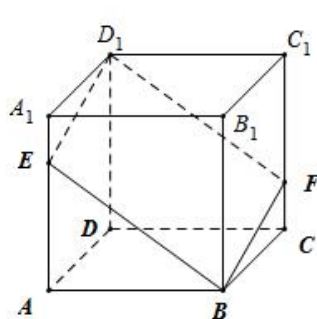
20. (12 分)

如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，点 F 在棱 CC_1 上，点 E 在棱 AA_1 上。

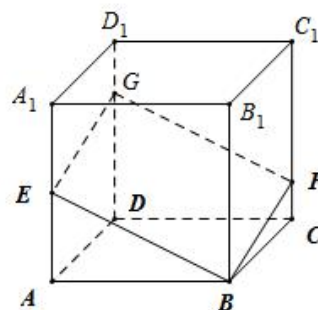
(1) 若 $A_1E = CF$ (如图 1)，求证： B 、 F 、 D_1 、 E 四点共面；

(2) 若 E 为 AA_1 的中点，过 B 、 E 、 F 三点的平面记为 α ，平面 α 与棱 DD_1 相交于 G 点 (如图 2)，

平面 α 将正方体分割所成的上下两个部分的体积分别为 V_1 、 V_2 ，若 $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$ ，求平面 α 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值。



第 20 题 图 1



第 20 题 图 2

21. (12 分)

设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的任意一点动点 M ，上顶点为 A 。

(1) 当上顶点 A 坐标为 $(0,1)$ ，离心率 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，求 $|MA|$ 的最大值；

(2) 过点 M 作圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{3}$ 的两条切线，切点分别为 P 和 Q ，直线 PQ 与 x 轴和 y 轴的交点分别为 E 和 F ，求 $\triangle EOF$ 面积的最小值。

22. (12 分)

已知 $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \frac{\ln x}{2}$ 。

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间； (2) 设 $a > 0, b > 0, a \neq b$ ，求证： $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$ 。