

重庆育才中学高 2022 届高考适应性考试二

数学试题

一、选择题：1-4 CADA 5-8 BCDD

二、选择题：全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.ACD 10. BCD 11. AD 12. CD

二、填空题：13.4 14. $f(x) = x^{-2}, \frac{1}{|x|}$ (答案不唯一) 15. $\ln(-2x)$. 16. $(1 - \sqrt{2 - \frac{2}{e}}, 0)$

四、解答题：

17.解 (1) $a_n = 2n - 1$.

(2)由(1)知 $b_n = 2^{2n-1}$, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 4 的等比数列, 前 n 项和 T_n

$$\text{所以 } T_n = \frac{2(1-4^n)}{1-4} = \frac{2(4^n-1)}{3}.$$

18.解: (1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $37 = 9 + c^2 - 3c$, $c^2 + 3c - 28 = 0$, $c = 4$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}.$$

(2) 法 1: 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times AD \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times AD \sin 60^\circ$

$$\text{得 } AD = \frac{12}{7}.$$

法 2: 由三角形内角平分线定理, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, $BD = \frac{4}{7}\sqrt{37}$,

在三角形 ABD 中, 根据余弦定理得 $(\frac{4\sqrt{37}}{7})^2 = AD^2 + 4^2 - 2 \times AD \times 4 \cos 60^\circ$,

$$AD^2 - 4AD + \frac{192}{49} = 0, \text{ 解得 } AD = \frac{12}{7} \text{ 或 } \frac{16}{7} \text{ (舍去)}.$$

19. 解: (I) 由

年度周期	1	2	3	4	5
纯增数量 (单位: 万辆)	3	6	9	15	27

所以 $\bar{x} = 3$, $\bar{y} = 12$,2 分

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 9 + 4 \times 15 + 5 \times 27 = 237.$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{237 - 5 \times 3 \times 12}{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 5 \times 3^2} = \frac{57}{55 - 45} = 5.7 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

因为 $\hat{y} = \hat{b}x + a$ 过点 $(\bar{x}, \bar{y})$, 所以 $\hat{y} = 5.7x + a$,

$a = -5.1$, 所以 $\hat{y} = 5.7x - 5.1 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

2025~2030 年时, $x = 7$, 所以 $y = 5.7 \times 7 - 5.1 = 34.8$,

所以 2025~2030 年间, 机动车纯增数量的值约为 34.8 万辆. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(II) 根据列联表, 由 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 得观测值为

$$K^2 = \frac{200 \times (85 \times 25 - 15 \times 75)^2}{100 \times 100 \times 160 \times 40} = \frac{25}{8} = 3.125, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$3.125 < 3.841,$$

所以没有 95% 的把握认为 “对限行的意见与是否拥有私家车有关”. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20.解: (I) 在 BB_1 上取点 H , 使 $B_1H = CF$,

在正方形 BCC_1B_1 中, 四边形 BFC_1H 是平行四边形,

所以 $BF \parallel HC_1$ 且 $BF = HC_1$, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又因为 $A_1E = B_1H$, 可得 $ED_1 \parallel HC_1$ 且 $ED_1 = HC_1$,

所以 $ED_1 \parallel BF$ 且 $ED_1 = BF$,

所以 B, F, D_1, E 四点共面. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(II) 连接 BG, BD , 则 $V_2 = V_{B-CFGD} + V_{B-DGEA}$,

设 $CF = t$, 则 $DG = 1 + t$,

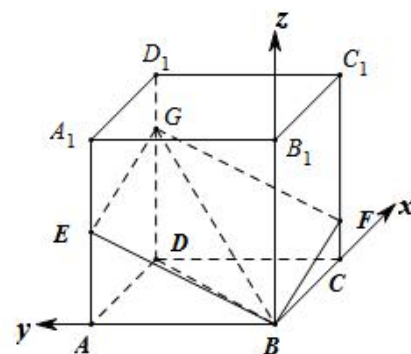
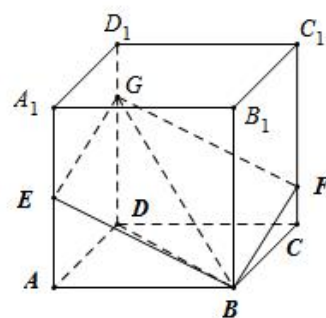
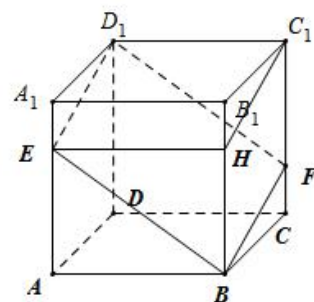
$$V_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{t+1+t}{2} \right) \times 2 \times 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1+t+1}{2} \right) \times 2 \times 2 = 2(t+1),$$

$$\text{所以 } \frac{8-2(t+1)}{2(t+1)} = \frac{5}{3}, \text{ 解得 } t = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

如图, 以 B 为坐标原点, 分别以 BC, BA, BB_1 为 x 轴、 y 轴、

z 轴建立空间直角坐标系 $B-xyz$

$$\text{则 } B(0,0,0), E(0,2,1), F(2,0,\frac{1}{2})$$



设平面 $BEGF$ 法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{BE} \bullet \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{BF} \bullet \vec{n} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} 2y \bullet z = 0 \\ 2x \bullet \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

令 $z=2$, 得 $\vec{n} = (-\frac{1}{2}, -1, 2)$ 10 分

又平面 $ABCD$ 法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$,

$$\text{所以} \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \bullet \vec{n}}{|\vec{m}| \bullet |\vec{n}|} = \frac{2}{1 \bullet \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1 + 4}} = \frac{4\sqrt{21}}{21},$$

所以平面 α 与平面 $ABCD$ 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{4\sqrt{21}}{21}$ 12 分

21. 解: (1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 设 $P(x, y)$, 则 $|MA|^2 = x^2 + (y-1)^2 = 4(1-y^2) + y^2 - 2y + 1$

$$= -3y^2 - 2y + 5 = -3(y + \frac{1}{3}) + \frac{16}{3}, \text{ 当 } y = -\frac{1}{3} \text{ 时, } |MA| \text{ 的最大值为 } \frac{4\sqrt{3}}{3};$$

(2) 设 $M(x_0, y_0)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

由题意知 PQ 斜率存在, 且不为 0, 所以 $x_0y_0 \neq 0$,

则直线 MP 和 MQ 的方程分别为 $x_1x + y_1y = \frac{b^2}{3}$, $x_2x + y_2y = \frac{b^2}{3}$. 因为点 M 在 MP 和 MQ 上, 所以有 $x_1x_0 + y_1y_0 = \frac{b^2}{3}$, x_2x_0

$+ y_2y_0 = \frac{b^2}{3}$, 则 P, Q 两点的坐标满足方程 $x_0x + y_0y = \frac{b^2}{3}$, 所以直线 PQ 的方程为 $x_0x + y_0y = \frac{b^2}{3}$, 可得 $E(\frac{b^2}{3x_0}, 0)$ 和 $F(0, \frac{b^2}{3y_0})$

所以 $S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} \cdot |OE| \cdot |OF| = \frac{b^4}{18|x_0y_0|}$, 因为 $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$, $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 \geq 2ab|x_0y_0|$, 所以 $|x_0y_0| \leq \frac{ab}{2}$, 所以 $S_{\triangle EOF} =$

$\frac{b^4}{18|x_0y_0|} \geq \frac{b^3}{9a}$, 当且仅当 $b^2x_0^2 = a^2y_0^2 = \frac{a^2b^2}{2}$ 时取“=”, 故 $\triangle EOF$ 面积的最小值为 $\frac{b^3}{9a}$.

22. 解: (1) 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{2x} = -\frac{(x-1)^2}{2x(x+1)^2} \leq 0$ 恒成立,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 为减函数.

(2) 不妨设 $a > b > 0$. 先证 $\frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$, 只要证 $\frac{a-b}{a+b} < \frac{\ln a - \ln b}{2}$, 即 $\frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} < \frac{\ln \frac{a}{b}}{2}$,

即 $\frac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1}-\frac{\ln \frac{a}{b}}{2}<0$, 令 $x=\frac{a}{b}, x>1$, 则需证 $\frac{x-1}{x+1}-\frac{\ln x}{2}<0$, 由 (1) 知, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}-\frac{\ln x}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 为减函数.

当 $x>1$ 时, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}-\frac{\ln x}{2}<f(1)$, 又 $f(1)=0$, 所以 $\frac{x-1}{x+1}-\frac{\ln x}{2}<0$, 即 $\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}$ 得证.

下面再证 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$, 即证 $\ln \frac{a}{b}<\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}$, 令 $t=\sqrt{\frac{a}{b}}, t>1$, 只要证 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$, $2\ln t-(t-\frac{1}{t})<0$

令 $g(t)=2\ln t-(t-\frac{1}{t}), (t>1)$, $g'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}\leq 0$ 恒成立,

$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 为减函数, $g(t)<g(1)$, 即得 $2\ln t<t-\frac{1}{t}$, 所以 $\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}$ 成立.