

重庆市 2021-2022 学年（上）8 月月度质量检测

高三数学

2021.08

【命题单位：重庆缙云教育联盟】

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座位号在答题卡上填写清楚；
2. 每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，在试卷上作答无效；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回；
4. 全卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小題给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\}$, 则 $A \cap B = ()$
- A. $\emptyset$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{1, 2, 5, 10\}$

2. 若复数 z 满足 $\frac{2i}{z} = 1 - i$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z = ()$

A. $1 + i$ B. $1 - i$ C. $-1 - i$ D. $-1 + i$

3. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 是 $\cos(2\alpha + \pi) = \frac{4}{5}$ 的 $()$

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 已知向量 $\vec{a} = (1, 4)$, $\vec{b} = (2, -m)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m = ()$

A. 8 B. -8 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

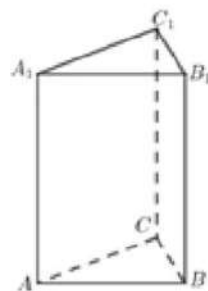
5. 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 侧棱长为 $\sqrt{2}$, 底面三角形的边长为 1, 则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角的正弦值为 $()$

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 点 P 是正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的侧面 DCC_1D_1 内的一个动点, 若 $\triangle APD$ 与 $\triangle BCP$ 的面积之比等于 2, 则点 P 的轨迹是 $()$

A. 圆的一部分 B. 椭圆的一部分
C. 双曲线的一部分 D. 抛物线的一部分

7. 若把单词 “anyway” 的字母顺序写错了, 则可能出现的错误写法的种数为 $()$



A. 179

B. 181

C. 193

D. 205

8. 若关于 x 的不等式 $(a+2)x \leq x^2 + a \ln x$ 在区间 $[\frac{1}{e}, e]$ (e 为自然对数的底数) 上有实数解, 则实数 a 的最大值是()

A. -1

B. $\frac{1-2e}{e(e+1)}$ C. $\frac{e(3-e)}{e-1}$ D. $\frac{e(e-2)}{e-1}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求的。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 2 分。

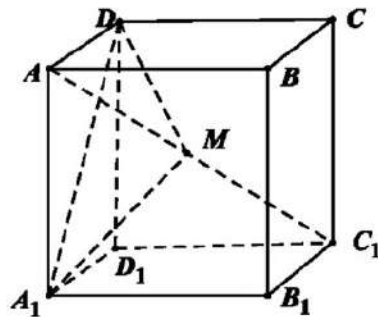
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $b+c=10$, $a=2\sqrt{10}$, 则三角形的面积不可能是()

A. $5\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $14\sqrt{3}$ D. $16\sqrt{3}$

10. 已知实数 a, b 满足 $a < b$, 则下列关系式不一定成立的是()

A. $a^2 < b^2$ B. $\ln(b-a) > 0$ C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ D. $2^a < 2^b$

11. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 M 是对角线 AC_1 上的点 (点 M 与 A, C_1 不重合), 则下列结论正确的是()

A. 存在点 M , 使得平面 $A_1DM \perp$ 平面 BC_1D ;B. 存在点 M , 使得 $DM \parallel$ 平面 B_1D_1C ;C. 若 $\triangle A_1DM$ 的面积为 S , 则 $S \in (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3})$;D. 若 S_1, S_2 分别是 $\triangle A_1DM$ 在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 与平面 BB_1C_1C 的正投影的面积, 则存在点 M , 使得 $S_1 = S_2$.

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点分别为 A 和 B , P 是椭圆上不同于 A, B 的一点. 设直线 AP, BP 的斜率分别为 m, n , 则当 $\frac{a}{b} \left(3 - \frac{2}{3mn} \right) + \frac{3}{mn} + \frac{9}{2} (\ln|m| + \ln|n|)$ 取最小值时, 椭圆 C 的离心率不可能是()

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{5}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_9 =$ _____.

14. 已知 $A \subseteq B$, 且 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, 则 $P(B|A) =$ _____.

15. 《九章算术》中将底面为长方形, 且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称为“阳马”. 现有阳马侧棱长为

4, 且水平放置的底面对应的斜二测画法的直观图是一个边长为 2 的菱形, 若该阳马的顶点都在同一个球面上, 则该球的体积为_____.

16. 在等腰三角形 ABC 中, AD 是底边 BC 上的中线, 点 M 是 AD 的中点, 则 $\sin \angle ABM$ 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_1 a_5 = 9$, $a_2 + a_4 = 10$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{b}{a+c} = \frac{\sin A - \sin C}{\sin B - \sqrt{3} \sin C}$.

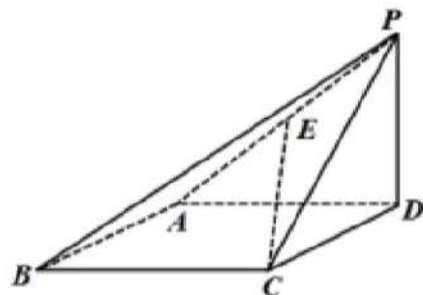
(1) 求 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 2, 求 $\triangle ABC$ 的周长的最小值.

19. 如图所示四棱锥 $P-ABCD$, 底面是一个菱形, 且 $\angle B = 60^\circ$, E 点为线段 PA 中点, 且 $CE = AB$, $CE \perp AD$, 面 $PAD \perp$ 面 $ABCD$.

(1) 求证: $PD \perp$ 面 $ABCD$;

(2) 求二面角 $C-PA-B$ 的余弦值.



20. 为了研究义务教育阶段学生的数学核心素养与抽象能力(指标 a 分)、推理能力(指标 b 分)、建模能力(指标 c 分)的相关性, 其中 $0 \leq a \leq 25$, $0 \leq b \leq 30$, $0 \leq c \leq 25$, 并将它们各自量化为一级、二级、三级 3 个等级, 再用综合指标 $y = a + b + c$ 的值评定学生的数学核心素养, 若 $y \geq 65$, 则数学核心素养为一级; 若 $50 \leq y < 65$, 则数学核心素养为二级; 若 $30 \leq y < 50$, 则数学核心素养为三级, 为了了解重庆市 1 年级至 9 年级在校学生的数学核心素养, 调查人员随机抽取了该地的五个年级, 访问了每个年级的 2 个学生, 统计得到这 10 个学生的如下数据:

x 年级	2	4	5	6	8
数学核心素养(分)	29, 31	38, 42	47, 53	56, 64	69, 71
数学核心素养平均分 y (分)	30	40	50	60	70

(1)画出散点图，并判断 x, y 之间是否具有相关关系.

(2)若 x, y 之间具有线性相关关系，试估计重庆市 9 年级的学生数学核心素养平均分为多少.

(3)在这 10 名学生中任取三人，其中数学核心素养等级是一级的学生人数记为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

附：①参考数据： $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 145$ ， $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1390$;

②求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的系数公式 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 ，上、下顶点分别是 B_1, B_2 ，离心率 $e = \frac{1}{2}$ ，短轴长为 $2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)过 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M, N ，若 $MN \perp B_1 F_2$ ，试求 $\triangle F_1 M N$ 内切圆的面积.

22. 已知函数 $f(x) = 2x \ln x - ax^2 - 2x + a^2 (a > 0)$ 在其定义域内有两个不同的极值点.

(I)求 a 的取值范围;

(II)设 $f(x)$ 两个极值点分别为 x_1, x_2 ，证明： $\sqrt{x_1 \cdot x_2} > e$.

重庆市 2021-2022 学年（上）8 月月度质量检测

高三数学答案及评分标准

【命题单位：重庆缙云教育联盟】

1. 【答案】C

【解析】解：∵集合 $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $B = \{y | y = x^2 + 1, x \in R\} = \{x | y \geq 1\}$,
 $\therefore A \cap B = \{1, 2, 3\}$.

故选：C.

求出集合 B ，由此能求出 $A \cap B$.

本题考查交集的求法，考查交集定义等基础知识，考查运算求解能力，是基础题.

2. 【答案】D

【解析】解：∵ $\frac{2i}{z} = 1 - i$,

$$\therefore z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i(1+i) = -1 + i.$$

故选：D.

根据已知条件，结合复数的四则运算公式，即可求解.

本题考查了复数代数形式的乘法运算，需要学生熟练掌握公式，属于基础题.

3. 【答案】A

【解析】解：当 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ 时， $\cos(2\alpha + \pi) = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha = 1 - 2 \times (\frac{\sqrt{10}}{10})^2 = \frac{4}{5}$ ，反之不一定成立，

故选：A.

直接利用三角函数的关系式的变换，充分条件和必要条件的应用求出结果.

本题考查的知识要点：三角函数的关系式的变换，充分条件和必要条件，主要考查学生的运算能力和数学思维能力，属于基础题.

4. 【答案】C

【解析】解：∵向量 $\vec{a} = (1, 4)$, $\vec{b} = (2, -m)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$,

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + 4 \times (-m) = 0, \text{ 求得 } m = \frac{1}{2},$$

故选：C.

由题意利用两个向量垂直的性质，两个向量的数量积公式，求得 m 的值.

本题主要考查两个向量垂直的性质，两个向量的数量积公式，属于基础题.

5. 【答案】D

【解析】解：如图，分别取 BC, B_1C_1 的中点 M, N . 由正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 易证， $MN \perp$ 平面 ABC .

连接 MA ，易知 MA, BC, MN 两两垂直.

以 M 为原点直线 MA, MB, MN 分别为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系 $M - xyz$ ：

由已知得： $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), C(0, -\frac{1}{2}, 0), C_1(0, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}), B(0, \frac{1}{2}, 0)$.

所以 $\overrightarrow{CA} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0), \overrightarrow{CC_1} = (0, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{BC_1} = (0, -1, \sqrt{2})$,

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{所以} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} \sqrt{2}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases},$$

令 $x = 1$ ，则 $y = -\sqrt{3}, z = 0$ ，故 $\vec{n} = (1, -\sqrt{3}, 0)$.

设 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成角为 θ ，则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BC_1} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{1}{2}$.

故选：D.

建立空间直角坐标系，分别求出 BC_1 的方向向量和平面 ACC_1A_1 的法向量，然后套公式计算即可.

本题考查空间角的求法，以及空间向量数量积的运算. 同时考查学生的数学运算能力. 属于中档题.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】

本题考查简单多面体(棱柱、棱锥、棱台)及其结构特征，三角形面积公式，圆有关的轨迹问题，考查逻辑推理能力和空间想象能力，属于中档题.

先正方体的结构特点可知， $\triangle APD$ 与 $\triangle BCP$ 是直角三角形， $\triangle APD$ 与 $\triangle BCP$ 的面积之比等于 2，即 $\frac{|PD|}{|PC|} = 2$,

再建立坐标系可得点 P 的轨迹方程即可.

【解答】

解：由正方体的结构特点可知， $\triangle APD$ 与 $\triangle BCP$ 是直角三角形，且 $|AD| = |BC|$,

$\therefore \triangle APD$ 与 $\triangle BCP$ 的面积之比等于 2，即 $\frac{|PD|}{|PC|} = 2$,

如图在平面 DCC_1D_1 建立空间直角坐标系，不妨设正方体的棱长为 1，

则 $D(0,0), C(1,0)$ ，设 $P(x,y)$ ，

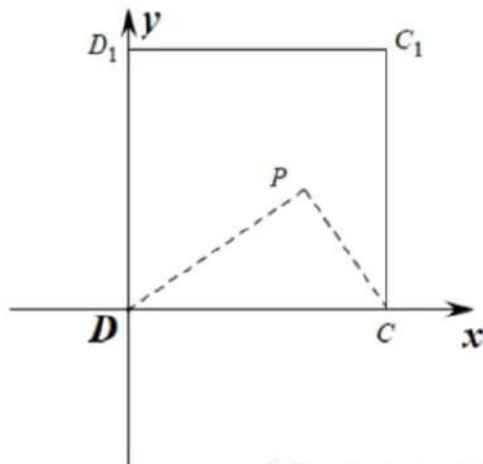
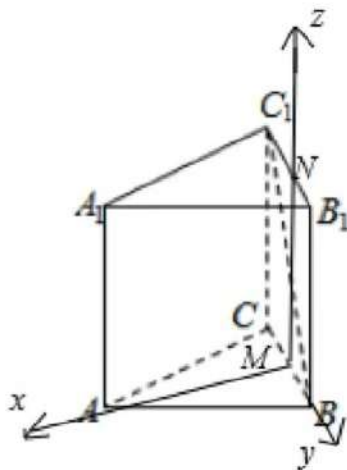
$$\text{则} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 2, \text{化简得} 3x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0,$$

$\therefore$ 点 P 的轨迹是圆的一部分.

故选 A.

7. 【答案】A

【解析】解：根据题意，单词 *anyway* 的字母有 2 个 “a”，2 个 “y”，1 个 “n” 和 1 个 “w”；



这 6 个字母的排放有 $C_6^2 C_4^2 A_2^2 = 180$ 种,

其中只有 1 种是正确的,

则可能出现的错误写法的种数为 $180 - 1 = 179$;

故选: A.

根据题意, 分析单词 *anyway* 的 6 个字母不同的排法顺序, 而这些排法中只有 1 种是正确的, 据此分析可得答案.

本题考查排列、组合的应用, 涉及分步计数原理的应用, 属于基础题.

8. 【答案】D

【解析】

【试题解析】

【分析】

本题考查了利用导数研究闭区间上函数的最值, 考查了导数中的存在性问题, 属于中档题.

由题意, 可得 $a \leq \left(\frac{x^2 - 2x}{x - \ln x} \right)_{\max}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$, 设 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$, 利用导数求出 $f(x)$ 的最大值即可.

【解答】

解: 易知 $x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$ 时 $x - \ln x > 0$,

$\therefore$ 由题意可得 $a \leq \left(\frac{x^2 - 2x}{x - \ln x} \right)_{\max}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$,

设 $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - \ln x}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$,

则 $f'(x) = \frac{(x-1)(x-2\ln x+2)}{(x-\ln x)^2}$, $x \in \left[\frac{1}{e}, e \right]$,

令 $g(x) = x - 2\ln x + 2$, $g'(x) = \frac{x-2}{x}$,

令 $g'(x) > 0$ 得 $2 < x \leq e$, 令 $g'(x) < 0$ 得 $\frac{1}{e} \leq x < 2$,

所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 2 \right)$ 上单调递减, 在 $(2, e]$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(2) = 4 - 2\ln 2 > 0$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 1$,

所以 $x \in \left[\frac{1}{e}, 1 \right)$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{e}, 1 \right)$ 上单调递减,

$x \in (1, e]$, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, e]$ 上单调递增,

且 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1-2e}{e^2+e} < 0$, $f(e) = \frac{e^2-2e}{e-1} > 0$,

故可得 $f(x)_{\max} = \frac{e^2-2e}{e-1}$, 故 $a \leq \frac{e^2-2e}{e-1}$,

故选 D.

9. 【答案】BCD

【解析】解：因为 $A = \frac{\pi}{3}$, $b + c = 10$, $a = 2\sqrt{10}$,

所以由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$, 可得 $40 = b^2 + c^2 - ab = (b + c)^2 - 3bc = 100 - 3bc$,
所以 $bc = 20$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$.

故选：BCD.

由已知利用余弦定理可求 bc 的值, 进而根据三角形的面积公式即可求解.

本题主要考查了余弦定理, 三角形的面积公式在解三角形中的应用, 考查了方程思想, 属于基础题.

10. 【答案】ABC

【解析】解：A：当 $a = -4$, $b = -3$ 时, 满足 $a < b$, 但 $a^2 > b^2$, $\therefore A$ 错误,

B：当 $a = -4$, $b = -3$ 时, 满足 $a < b$, 但 $\ln(b - a) = 0$, $\therefore B$ 错误,

C：当 $a = -4$, $b = 3$ 时, 满足 $a < b$, 但 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, $\therefore C$ 错误,

D： $\because y = 2^x$ 为增函数, $a < b$, $\therefore 2^a < 2^b$, $\therefore D$ 正确.

故选：ABC.

通过举实例判断 A, B, C, 利用指数函数的单调性判断 D.

本题考查不等式大小的比较, 考查列举法和指数函数的单调性, 属于基础题.

11. 【答案】ABD

【解析】

【分析】

本题主要考查了空间直线与平面, 平面与平面的位置关系, 以及三角形面积, 以及投影的定义的应用, 其中解答中熟记线面位置关系的判定与性质, 以及熟练应用空间几何体的结构特征是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于中档试题. 由线面垂直的判定定理和面面垂直的判定定理, 可判定 A 正确; 由面面平行的性质定理, 可得判定 B 正确; 由三角形的面积公式, 可求得 $\triangle A_1DM$ 的面积为 S 的范围, 可判定 C 错误; 由三角形的面积公式, 得到 S_1, S_2 的范围, 可判定 D 正确.

【解答】

解：连接 B_1C , 设平面 A_1B_1CD 与体对角线 AC_1 交于点 M ,

由 $B_1C \perp BC_1$, $DC \perp BC_1$, $B_1C \cap DC = C$,

$B_1C, DC \subset$ 平面 A_1B_1CD ,

可得 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD , 即 $BC_1 \perp$ 平面 A_1DM ,

又 $BC_1 \subset$ 平面 BC_1D ,

$\therefore$ 平面 $A_1DM \perp$ 平面 BC_1D ,

$\therefore$ 存在点 M , 使得平面 $A_1DM \perp$ 平面 BC_1D , 故①对;

由 $BD // B_1D_1$, $AD_1 // BC_1$, 由面面平行的判定容易得: 平面 $A_1DB //$ 平面 CB_1D_1 ,

设平面 A_1DB 与 AC_1 交于点 M , 可得 $DM //$ 平面 B_1D_1C , 故②对;

连接 AD_1 交 A_1D 于点 O , 过 O 作 $OM \perp AC_1$, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $A_1D \perp$ 平面 ABC_1D_1 , $OM \subset$ 平面 ABC_1D_1 ,

$\therefore A_1D \perp OM$,

$\therefore OM$ 为异面直线 A_1D 与 AC_1 的公垂线, 根据 $\triangle AOM \sim \triangle AC_1D_1$, 则

$$\frac{OM}{C_1D_1} = \frac{OA}{AC_1}, \text{ 即 } OM = \frac{OA \cdot C_1D_1}{AC_1} = \frac{\sqrt{2} \times 2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore \triangle A_1DM$ 的最小面积为 $S_{\triangle A_1DM} = \frac{1}{2} \times AD_1 \times OM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故③错;

在点 M 从 AC_1 的中点向着点 A 运动过程中, S_1 从 1 减少趋向于 0, 即 $S_1 \in (0,1)$, S_2 从 0 增大到趋向于 2, 即 $S_2 \in (0,2)$,

在这过程中, 必存在某个点 M 使得 $S_1 = S_2$, 故④对.

故选: ABD .

12. 【答案】 BCD

【解析】

【分析】

本题考查了椭圆的性质及几何意义、利用导数研究函数的单调性极值与最值, 属于较难题.

设 $P(x_0, y_0)$, $y_0^2 = \frac{b^2(a^2 - x_0^2)}{a^2}$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, 则 $\frac{a}{b}(3 - \frac{2}{3mn}) + \frac{3}{mn} + \frac{9}{2}(\ln|m| + \ln|n|) = \frac{3a}{b} + \frac{2a^3}{3b^3} - \frac{3a^2}{b^2} +$

$\frac{9}{2}\ln\frac{b^2}{a^2} = f\left(\frac{a}{b}\right)$, 令 $\frac{a}{b} = t > 1$, 则 $f(t) = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 3t - 9\ln t$, 利用导数求出最值, 可得 $\frac{a}{b} = 3$, 进而可得

离心率.

【解答】

解: 设 $P(x_0, y_0)$, $y_0^2 = \frac{b^2(a^2 - x_0^2)}{a^2}$, $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$,

则 $m = \frac{y_0}{x_0 + a}$, $n = \frac{y_0}{x_0 - a}$, $\therefore mn = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$,

$\frac{a}{b}(3 - \frac{2}{3mn}) + \frac{3}{mn} + \frac{9}{2}(\ln|m| + \ln|n|) = \frac{3a}{b} + \frac{2a^3}{3b^3} - \frac{3a^2}{b^2} + \frac{9}{2}\ln\frac{b^2}{a^2} = f\left(\frac{a}{b}\right)$,

令 $\frac{a}{b} = t > 1$, 则 $f(t) = \frac{2}{3}t^3 - 3t^2 + 3t - 9\ln t$,

$\therefore f'(t) = 2t^2 - 6t + 3 - \frac{9}{t} = \frac{(t-3)(2t^2+3)}{t}$,

$t \in (1,3)$ 时, $f'(t) < 0$, $f(t)$ 单调递减, $t \in (3, +\infty)$ 时, $f'(t) > 0$, $f(t)$ 单调递增,

可知: 当 $t = 3$ 时, 函数 $f(t)$ 取得最小值 $f(3) = -9\ln 3$,

$\therefore \frac{a}{b} = 3. \therefore e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故选 A .

13. 【答案】 18

【解析】解: 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1} (n \geq 2, n \in N^*)$,

$\frac{a_9}{a_8} \cdot \frac{a_8}{a_7} \cdot \frac{a_7}{a_6} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{9}{8} \times \frac{8}{7} \times \cdots \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} = 9 = \frac{a_9}{a_1}$,

则 $a_9 = 9 \times 2 = 18$.

故答案为: 18.

利用数列的递推关系式, 通过累积法求解数列的项即可.

本题考查数列的递推关系式的应用, 累积法的应用, 是基础题.

14. 【答案】 1

【解析】解：因为 $A \subseteq B$ ，且 $P(A) = 0.3$ ， $P(B) = 0.6$ ，
所以 $P(AB) = P(A) = 0.3$ ，

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.3} = 1.$$

故答案为：1.

由题意，先求出 $P(AB) = P(B) = 0.3$ ，然后由条件概率的概率公式求解即可.

本题考查了概率公式的应用，主要考查了条件概率概率公式的应用，考查了逻辑推理能力，属于基础题.

15. 【答案】 36π

【解析】

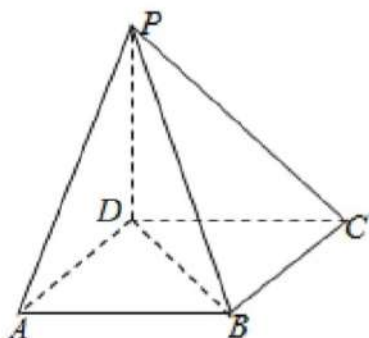
【分析】

本题考查了空间几何体的直观图与斜二测画法，四棱锥的结构特征、球的体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

该几何体为四棱锥 $P-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为矩形，其中 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD = PD = 4$ ， $AB = 2$ ，求出球的半径即可得体积.

【解答】

解：如图所示，



该几何体为四棱锥 $P-ABCD$ ，底面 $ABCD$ 为矩形，
其中 $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB = 2$ ， $AD = 4$ ， $PD = 4$.

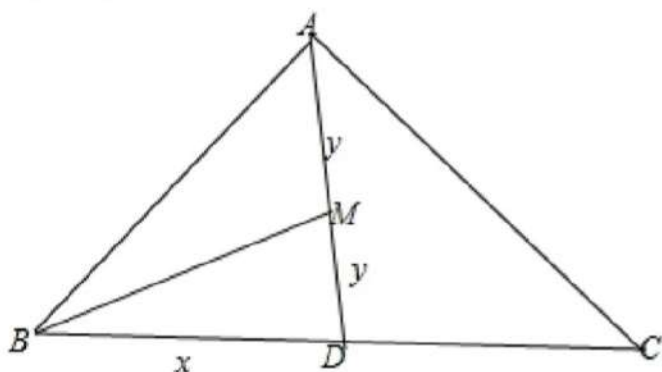
则该阳马的外接球的直径为 $PB = \sqrt{PD^2 + DB^2} = \sqrt{PD^2 + AD^2 + AB^2} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2} = 6$.

$$\therefore \text{该阳马的外接球的体积} = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 36\pi.$$

故答案为 36π .

16. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】解：等腰三角形 ABC 中， AD 是底边 BC 上的中线，点 M 是 AD 的中点，
如图所示：



设 $BD = x$, $MD = MA = y$,

所以 $AB = BM = \sqrt{x^2 + y^2}$,

所以在 $\triangle ABM$ 中, 利用正弦定理: $\frac{AM}{\sin \angle ABM} = \frac{BM}{\sin \angle BAM}$,

$$\text{所以 } \sin \angle ABM = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(4 + (\frac{x}{y})^2)(1 + (\frac{y}{x})^2)}} = \frac{1}{\sqrt{5 + 4(\frac{y}{x})^2 + (\frac{x}{y})^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{4 \times (\frac{y}{x})^2 \times (\frac{x}{y})^2}}} = \frac{1}{3}.$$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

直接利用三角函数关系式的变换和正弦定理和基本不等式的应用求出结果.

本题考查的知识要点: 正弦定理的应用, 三角函数关系式的变换, 基本不等式的应用, 主要考查学生的运算能力和数学思维能力, 属于中档题.

17. 【答案】解: (1) 由 $a_1 a_5 = 9$, $a_2 + a_4 = 10$,

$$\text{则 } \begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 9 \\ a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 10 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a_1 = 9 \\ a_5 = 1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_5 = 9 \end{cases}$$

由于数列为递增数列,

则: $a_1 = 1$, $a_5 = 9$.

故: $d = 2$,

则: $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$.

(2) 由于 $a_n = 2n - 1$,

$$\text{则: } b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

所以: $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}.$$

【解析】本题考查的知识要点: 数列的通项公式的求法及应用, 裂项相消法在数列求和中的应用, 主要考查学生的运算能力和转化能力, 属于基础题型.

(1) 根据等差数列性质求出 a_1 与 a_5 , 进而可得公差, 即可得通项公式.

(2) 利用(1)的结论, 进一步利用裂项相消法求出数列的和.

18. 【答案】解: (1) 由已知, 得 $b(\sin B - \sqrt{3}\sin C) = (a + c)(\sin A - \sin C)$,

由正弦定理, 得 $b(b - \sqrt{3}c) = (a + c)(a - c)$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$,

$$\text{再由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

又 $0 < A < \pi$,

所以 $A = \frac{\pi}{6}$;

(2)由(1)及已知得, $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{6} = 2$,

所以 $bc = 8$,

又 $b + c \geq 2\sqrt{bc} = 4\sqrt{2}$;

当且仅当 $b = c = 2\sqrt{2}$ 时, $b + c$ 取得最小值;

于是 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$

$= (b + c)^2 - 2bc - \sqrt{3}bc = (b + c)^2 - 16 - 8\sqrt{3}$;

此时 $a + b + c$

$= \sqrt{(b + c)^2 - 16 - 8\sqrt{3}} + b + c \geq \sqrt{16 - 8\sqrt{3}} + 4\sqrt{2} = 2\sqrt{3} - 2 + 4\sqrt{2}$,

故 $\triangle ABC$ 的周长的最小值为 $2\sqrt{3} - 2 + 4\sqrt{2}$.

此时 $a = 2\sqrt{3} - 2$, $b = c = 2\sqrt{2}$.

【解析】本题主要考查了正弦定理和余弦定理的运用, 利用基本不等式求最值, 考查了学生对基础知识的灵活运用.

(1)利用正弦定理将等式转化为 $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$, 再结合余弦定理整理求得 A ;

(2)根据题意利用面积公式求得 bc 的值, 列出周长的表达式, 利用不等式的性质确定周长的最小值.

19.【答案】(1)证明: 取 AD 的中点 F , 连结 EF , CF , AC ,

因为四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle B = 60^\circ$,

所以 $\triangle ACD$ 是等腰三角形,

又因为 F 是 AD 的中点, 所以 $CF \perp AD$,

又因为 $CE \perp AD$, $CF \cap CE = C$, $CE, CF \subset$ 平面 CEF ,

故 $AD \perp$ 平面 CEF , 又 $EF \subset$ 平面 CEF ,

所以 $AD \perp EF$, 又因为 E 是 AP 的中点, 所以 $EF \parallel PD$,

则 $PD \perp AD$, 又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

所以 $PD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2)解: 以 F 为坐标原点, 建立空间直角坐标系如图所示,

设 $AB = 2$, $PD = a$,

则 $A(1, 0, 0)$, $D(-1, 0, 0)$, $P(-1, 0, a)$, $E(0, 0, \frac{a}{2})$, $b(2, \sqrt{3}, 0)$, $c(0, \sqrt{3}, 0)$,

因为 $CE = AB$, 则 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\frac{a}{2})^2} = 2$, 解得 $a = 2$,

故 $F(-1, 0, 2)$, $\overrightarrow{AP} = (-2, 0, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, \sqrt{3}, 0)$,

设平面 ABP 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

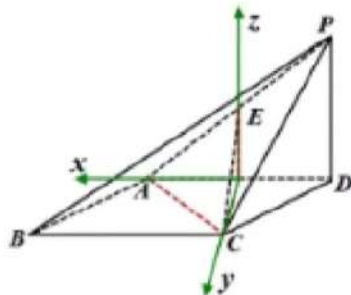
则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$,

令 $x = 1$, 则 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z = 1$, 故 $\vec{n} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$,

设平面 ACP 的法向量为 $\vec{m} = (p, q, r)$,

则 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} -2p + 2r = 0 \\ p - \sqrt{3}q = 0 \end{cases}$,

令 $p = 1$, 则 $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $r = 1$, 故 $\vec{m} = (1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$,



$$\text{所以} |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}} \times \sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{5}{7},$$

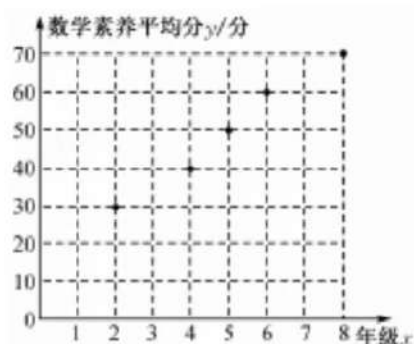
故二面角 $C-PA-B$ 的余弦值为 $\frac{5}{7}$.

【解析】(1)取 AD 的中点 F , 连结 EF, CF, AC , 利用菱形的性质可证 $CF \perp AD$, 从而证明 $AD \perp$ 平面 CEF , 可得 $AD \perp EF$, 由面面垂直的性质定理证明即可;

(2)建立合适的空间直角坐标系, 求出所需点的坐标和向量的坐标, 然后利用待定系数法求出平面 ABP 和 ACP 的法向量, 由向量的夹角公式求解即可.

本题考查了立体几何的综合应用, 涉及了线面垂直的判定定理的应用和二面角的求解, 在求解有关空间角问题的时候, 一般会建立合适的空间直角坐标系, 将空间角问题转化为空间向量问题进行研究, 属于中档题.

20. 【答案】解: (1)散点图如图所示:



由图可以看出这些点都在一条直线的附近, 所以 x, y 之间具有线性相关关系.

$$(2) \because \bar{x} = \frac{25}{5} = 5, \bar{y} = \frac{250}{5} = 50, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 145, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1390.$$

$$\therefore b = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{1390 - 5 \times 5 \times 50}{145 - 5 \times 5^2} = 7, \bar{x} = \bar{y} - b\bar{x} = 50 - 7 \times 5 = 15$$

所以线性回归方程为 $\hat{y} = 7x + 15$.

当 $x = 9$ 时, $y = 7 \times 9 + 15 = 78$, 所以估计该地 9 年级的学生数学核心素养平均分为 78 分.

(3) $\because x$ 的所有可能取值为 0, 1. 素养一级的学生是 8 年级的两名同学, 非一级的学生为余下 8 人,

$\therefore X$ 的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_8^3}{C_1^3} = \frac{7}{15}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_1^3} = \frac{7}{15}, P(X=2) = \frac{C_2^2 C_8^1}{C_1^3} = \frac{1}{15}.$$

$\therefore$ 随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$\therefore E(x) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}.$$

【解析】本题主要考查散点图、两个变量的相关关系、线性回归直线方程以及随机变量的分布列和数学期望.

(1)根据题意画出散点图, 即可得;

(2)根据所给公式求出线性回归直线方程, 然后可求;

(3)由排列组合的知识求出分布列和数学期望.

21. 【答案】解: 由题意得 $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ 2b = 2\sqrt{3} \end{cases}$, 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得 $a^2 = 4$, $b^2 = 3$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2)由 $B_1(0, \sqrt{3})$, $F_2(1, 0)$, 知 B_1F_2 的斜率为 $-\sqrt{3}$,

因 $MN \perp B_1F_2$, 故 MN 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

则直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1)$, 即 $x = \sqrt{3}y + 1$,

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = \sqrt{3}y + 1 \end{cases}$, 可得: $13y^2 + 6\sqrt{3}y - 9 = 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{6\sqrt{3}}{13}$, $y_1y_2 = -\frac{9}{13}$,

则 $\triangle F_1MN$ 的面积 $S = c \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{24}{13}$,

由 $\triangle F_1MN$ 的周长 $L = 4a = 8$, 及 $S = \frac{1}{2}LR$, 得内切圆 $R = \frac{2S}{L} = \frac{6}{13}$,

所以 $\triangle F_1MN$ 的内切圆面积为 $\pi R^2 = \frac{36}{169}\pi$.

【解析】本题考查椭圆的标准方程及简单几何性质, 考查直线与椭圆的位置关系, 考查韦达定理与弦长公式的应用, 考查椭圆与函数的综合应用, 属于中档题.

(1)由题意可知: $2b = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{3}$, 椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $a = 2c$, 代入 $a^2 = b^2 + c^2$, 求得 a , 即可求得椭圆 C 的标准方程;

(2)将 $x = \sqrt{3}y + 1$, 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = \sqrt{3}y + 1 \end{cases}$, 由 $\triangle F_1MN$ 的周长 $L = 4a = 8$, 及 $S = \frac{1}{2}LR$, 得内切圆 $R = \frac{2S}{L} = \frac{6}{13}$,

即可得.

22. 【答案】解: (I)由题意得 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,

$$f(x) = 2x \ln x - ax^2 - 2x + a^2 (a > 0),$$

则 $f'(x) = 2 \ln x + 2 - 2ax - 2$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $\ln x - ax = 0$,

问题转化为方程 $\ln x - ax = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个异根,

令 $g(x) = \ln x - ax$, 问题转化为函数 $g(x)$ 有 2 个不同的零点,

$$\text{而 } g'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x} \quad (x > 0),$$

$\because a > 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $g'(x) < 0$,

故 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减,

$$\text{故 } g(x)_{\text{极大值}} = g(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} - 1,$$

又 $\because$ 当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$,

于是只需 $g(x)_{\text{极大值}} > 0$, 即 $\ln \frac{1}{a} - 1 > 0$, 故 $0 < a < \frac{1}{e}$,

即 a 的取值范围是 $(0, \frac{1}{e})$;

(II) 证明: 由 (I) 可知 x_1, x_2 分别是方程 $\ln x - ax = 0$ 的两个根,

$$\text{即 } \ln x_1 = ax_1, \ln x_2 = ax_2,$$

$$\text{设 } x_1 > x_2, \text{ 作差得 } \ln \frac{x_1}{x_2} = a(x_1 - x_2), \text{ 即 } a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2},$$

原不等式 $\sqrt{x_1 \cdot x_2} > e$ 等价于 $x_1 \cdot x_2 > e^2$,

$$\ln x_1 + \ln x_2 > 2 \Leftrightarrow a(x_1 + x_2) > 2 \Leftrightarrow \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2},$$

$$\text{令 } t = \frac{x_1}{x_2}, \text{ 则 } t > 1, \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1},$$

$$\text{设 } g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \quad (t > 1), \text{ 则 } g'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

$\therefore$ 函数 $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore g(t) > g(1) = 0, \text{ 即不等式 } \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1} \text{ 成立,}$$

故所证不等式成立.

【解析】(I) 求出函数的导数, 令 $g(x) = \ln x - ax$, 问题转化为函数 $g(x)$ 有 2 个不同的零点, 求出函数的导数, 根据函数的单调性求出函数 $g(x)$ 的极大值, 得到关于 a 的不等式, 解出即可;

$$(II) \text{ 求出 } a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}, \text{ 问题转化为 } \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2}, \text{ 令 } t = \frac{x_1}{x_2}, \text{ 则 } t > 1, \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow \ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}, \text{ 设}$$

$$g(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} \quad (t > 1), \text{ 根据函数的单调性证明结论成立即可.}$$

本题考查了函数的单调性, 极值, 最值问题, 考查导数的应用以及不等式的证明, 考查转化思想, 是难题.