# 重庆市第八中学2021届高考适应性月考卷（六）
# 数学参考答案

## 一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 答案 | A | D | C | B | D | C | B | A |

**【解析】**

1. $\{1,2\}\subsetneqq C\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，即集合$\{3,4,5\}$的非空子集的个数为$2^3-1=7$，故选A.

2. 抛物线焦点坐标为$(1,0)$，所以焦点到直线的距离为$d=\dfrac{1}{2}$，故选D.

3. $P(C)=\dfrac{\mathrm{C}_4^1}{\dfrac{\mathrm{C}_6^3\cdot\mathrm{C}_3^3}{\mathrm{A}_2^2}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$，故选C.

4. 由题意$100(1+x)^{40}=500$，$\therefore 40\ln(1+x)=\ln 5$，则$x\approx\ln(1+x)=\dfrac{\ln 5}{40}\approx\dfrac{1.61}{40}=0.04025$，则2020年全年投入资金为$500(1+x)=500\times\left(1+\dfrac{1.61}{40}\right)=520.125$万元，故选B.

5. 由$S_5=2a_3-3$，得$a_3=-1$，又$a_9=2$，则$d=\dfrac{1}{2}$，$a_1=-2$，于是$S_8=8a_1+\dfrac{8\times 7}{2}d=-2$，故选D.

6. $\because \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，且$3\cos 2\alpha=2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$，$\therefore 3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，$\therefore 3(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，$\therefore \cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$①，或$\cos\alpha-\sin\alpha=0$(舍去)，$\therefore$两边平方，可得$1+\sin 2\alpha=\dfrac{2}{9}$，解得$\sin 2\alpha=-\dfrac{7}{9}$，故选C.

7. 设$(x-\sqrt{2})^8=a_0+a_1x^1+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_8x^8$①，$(-x-\sqrt{2})^8=a_0-a_1x^1+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+a_8x^8$②，①－②得$2(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7)=(x-\sqrt{2})^8-(x+\sqrt{2})^8$，$\therefore(x-\sqrt{2})^8$展开式的

奇次幂项之和为$S(x)=\frac{1}{2}[(x-\sqrt{2})^8-(x+\sqrt{2})^8]$，当$x=-\sqrt{2}$时，$S(-\sqrt{2})=$

$\frac{1}{2}[(-\sqrt{2}-\sqrt{2})^8-(-\sqrt{2}+\sqrt{2})^8]=\frac{2^{\frac{3\times8}{2}}}{2}=2^{11}$，故选 B.

8．$\because f'(x)=2\cos2x-a\sin x+6\geqslant0$，$\therefore 8-4\sin^2x-a\sin x\geqslant0\Leftrightarrow4\sin^2x+a\sin x-8\leqslant0$，设

$t=\sin x(-1\leqslant t\leqslant1)$，即有$4t^2+at-8\leqslant0$，只需要$\begin{cases}4\times(-1)^2+a\times(-1)-8\leqslant0,\\4\times1^2+a\times1-8\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow$

$a\in[-4,4]$，故选 A.

**二、选择题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分）

| 题号 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | ABC | ACD | AD | AC |

**【解析】**

9．$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$构成等边三角形，A 正确；$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$由向量加法的平行四边形法则可知，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，B 正确；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\Rightarrow|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\Rightarrow\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，C 正确；若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角或者$\pi$，D 错误，故选 ABC.

10．$f(\ln2)=\ln(e^{2\ln2}+1)-\ln2=\ln\frac{5}{2}$，故 A 项正确；$f(x)=\ln(e^{2x}+1)-x=\ln(e^{2x}+1)-\ln e^x=\ln\frac{e^{2x}+1}{e^x}=\ln(e^x+e^{-x})$，$f(-x)=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数，故 B 项错误；$x>0$时，$y=e^x+e^{-x}$在$(0,+\infty)$上单调递增，因此$y=\ln(e^x+e^{-x})$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 C 项正确；由于$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$f(x)$为偶函数，所以$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，所以$f(x)$的最小值为$f(0)=\ln2$，D 正确，故选 ACD.

11．$a_{1010}>1$，$0<a_{1011}<1$，$\therefore q\in(0,1)$，A 正确；$a_{1010}a_{1012}=a_{1011}^2<1$，B 错误；因为当$n\leqslant1010$

时，$a_n>1$，$n\geqslant 1011$时，$a_n<1$，则$T_n$的最大值为$T_{1010}$，C 错误；$T_{2019}=a_{1010}^{2019}>1$，$T_{2020}=(a_{1010}a_{1011})^{1010}>1$，$T_{2021}=(a_{1011})^{2021}<1$，D 正确，故选 AD.

12．对于 A 项，过 $P$ 作 $BB_1$ 的垂线，垂足为 $N$，$PN\perp BM$，$AN\perp BM$，所以$BM\perp$平面$APN$，所以$BM\perp AP$，故 A 正确；对于 B 项，将平面$AA_1C_1C$与平面$BCC_1B_1$沿$CC_1$如图 1 展开，

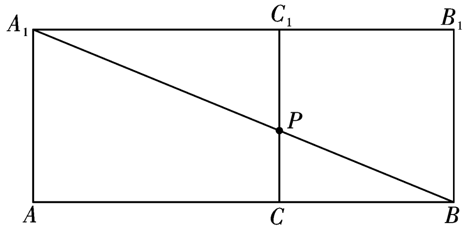

图 1

$(|BP|+|PA_1|)_{\min}=\sqrt{|AB|^2+|BB_1|^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+1^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$，故 B 错误；对于 C 项，点 $P$ 到直线$C_1D_1$的距离即 $P$ 到点$C_1$的距离，则点 $P$ 到直线 $BC$ 的距离等于它到点$C_1$的距离，所以点 $P$ 的轨迹是抛物线，故 C 正确；因为三角形面积为定值，以$BD_1$为底，则底边长一定，从而可得 $P$ 到直线$BD_1$的距离为定值，分析可得，点 $P$ 在以$BD_1$为轴线的圆柱面与平面$\beta$的交线上，且$\beta$与圆柱的轴线斜交，由平面与圆柱面的截面的性质判断，可得 $P$ 的轨迹为椭圆，D 错误，故选 AC.

**三、填空题**（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

| 题号 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|
| 答案 | $\left(2,\dfrac{11\pi}{6}\right)$，$\left(-2,\dfrac{7\pi}{6}\right)$（填任意一个都对） | $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$ | $\sqrt{7}+1$ | $\dfrac{5}{3}$ |

**【解析】**

13．函数的周期相同，若$\omega=2$，此时$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin(2x+\varphi)$，此时$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{11\pi}{6}$，若$\omega=-2$，则方程等价为$\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-2x+\dfrac{7\pi}{6}\right)=\sin(-2x+\varphi)$，则$\varphi=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$，$k=0$，则$\varphi=\dfrac{7\pi}{6}$，综上，满足条件的有序实数组$(\omega,\varphi)$为$\left(2,\dfrac{11\pi}{6}\right)$，$\left(-2,\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

14．设$Z_3$对应的复数为$z_3$，可得$|z_3|=|z_1|=2$，复平面上$Z_1$与 $x$ 轴的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，则$Z_3$与 $x$ 轴

的夹角为 $\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $z_3=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$，所以 $z_3z_1=(-\sqrt{3}+\mathrm{i})(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=$

$-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$.

15．5 个球心组成一个正四棱锥，这个正四棱锥的底面边长为 2，侧棱长为 3，求得它的高为 $\sqrt{7}$，所以大球的球心到水平桌面 $\alpha$ 的距离是 $\sqrt{7}+1$.

16．$\because\triangle NA_2O\backsim\triangle MA_2F$，$\therefore\dfrac{|ON|}{|MF|}=\dfrac{|OA_2|}{|A_2F|}=\dfrac{a}{c-a}$，又 $\because\triangle A_1OH\backsim\triangle A_1FM$，$\therefore\dfrac{|OH|}{|FM|}=$

$\dfrac{|A_1O|}{|A_1F|}=\dfrac{a}{a+c}$，$\because|ON|=4|OH|$，$\dfrac{a}{c-a}=\dfrac{4a}{c+a}$，$\therefore 3c=5a$，即离心率 $e=\dfrac{5}{3}$.

**四、解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^{n+1}-2)-(2^n-2)=2^n$；

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$. ……………………………………………（5 分）

（2）由（1）可知，$b_n=|a_n-100|=\begin{cases}100-2^n，1\leqslant n\leqslant 6,\\ 2^n-100，n\geqslant 7,\end{cases}$ 其中 $n\in\mathbf{N}^*$，

故 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为

$T_{10}=(100-2)+(100-2^2)+\cdots+(100-2^6)+(2^7-100)+\cdots+(2^{10}-100)$

$=200-(2^1+2^2+\cdots+2^6)+(2^7+2^8+2^9+2^{10})=200+S_{10}-2S_6$

$=200+2^{11}-2-2(2^7-2)=1994$. ……………………………………………（10 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）取 $BE$ 中点 $P$，$AB$ 中点 $F$，连接 $PD$，$PF$，

则 $PF/\!/AE$，于是 $PF/\!/CD$，且 $PF=CD$，

故四边形 $PFCD$ 为平行四边形，$DP/\!/CF$，

由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，故 $CF\perp AB$，

又 $AA_1\perp$ 平面 $ABC$，则 $AA_1\perp CF$，

又 $AA_1\cap AB=A$，所以 $CF\perp$ 平面 $ABB_1A_1$，

于是 $DP\perp$ 平面 $ABB_1A_1$. ……………………………………………………（6 分）

（2）以 $F$ 为坐标原点，$\overrightarrow{FB}$，$\overrightarrow{FC}$，$\overrightarrow{FP}$ 为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴正方向建立空间直角坐标系，

则 $B(1,\ 0,\ 0)$，$E(-1,\ 0,\ 2)$，$C_1(0,\ \sqrt{3},\ 3)$，

则 $\overrightarrow{BC_1}=(-1,\ \sqrt{3},\ 3)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,\ 0,\ 2)$，

由（1）知：$FC\perp$ 平面 $BEA_1$，故平面 $BEA_1$ 的法向量 $\boldsymbol{m}=(0,\ 1,\ 0)$，

设平面 $C_1BE$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+\sqrt{3}y+3z=0,\\ -2x+2z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\ -2,\ \sqrt{3})$，

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{2}{\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

又二面角 $C_1-BE-A_1$ 为锐二面角，故二面角 $C_1-BE-A_1$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

……………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）∵ $c\cos^2\dfrac{B}{2}+b\sin^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{a+c}{2}$，

∴ $c\cdot\dfrac{1+\cos B}{2}+b\dfrac{1-\cos C}{2}=\dfrac{a+c}{2}$，

即 $c\cdot\cos B+b(1-\cos C)=a$，

由正弦定理可得 $\sin C\cdot\cos B+\sin B(1-\cos C)=\sin A=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

化简可得 $\sin B=2\sin B\cos C$，又 $B\in(0,\ \pi)$，$\sin B\neq 0$，

则 $\cos C=\dfrac{1}{2}$，故 $C=\dfrac{\pi}{3}$.　……………………………………………（6 分）

（2）法一：由 $S=3\sqrt{3}\sin A\sin B$，得 $\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\sin A\sin B$，

则 $ab=12\sin A\sin B$，

设△$ABC$ 的外接圆半径为 $R$，由正弦定理得 $2R\sin A\cdot 2R\sin B=12\sin A\sin B$，则 $R=\sqrt{3}$，

于是有 $c=2R\sin C=3$，又由余弦定理得 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2+b^2-9}{2ab}$，又 $a=3b$　　，

解得$b^2=\frac{9}{7}$，所以$b=\frac{3\sqrt{7}}{7}$. …………………………………………………（12 分）

法二：由$a=3b$ ①，则$\sin A=3\sin B$ ②，

又$C=\frac{\pi}{3}$，于是$\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)=3\sin B$，

故$\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B=3\sin B$，

所以$\sqrt{3}\cos B=5\sin B$，

又$\sin^2 B+\cos^2 B=1$，解得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$(舍负)，

又$S=3\sqrt{3}\sin A\sin B$，则$\frac{1}{2}ab\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\sin A\sin B$，

故$ab=12\sin A\sin B$，将①②代入可得$b^2=12\sin^2 B=12\times\frac{3}{28}=\frac{9}{7}$，

所以$b=\frac{3\sqrt{7}}{7}$. …………………………………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）（i）由题意，系统抽样抽出的序号成等差数列$40n-32$，

收入在$[12,14)$的贫困户的序号满足$1400<40n-32\leqslant 1700\Rightarrow 35.8<n\leqslant 43.3$，

故收入在$[12,14)$的有 8 户；

收入在$[16,18]$的贫困户的序号满足$1900<40n-32\leqslant 2000\Rightarrow 48.3<n\leqslant 50.8$，

故收入在$[16,18]$的有 2 户.

…………………………………………………（3 分）

（ii）随机变量$X$的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_8^0C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，

$P(X=1)=\frac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，

$P(X=2)=\frac{C_8^2C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$，

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
| --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{28}{45}$ |

所以$E(X)=0\times\frac{1}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{28}{45}=\frac{8}{5}$.

……………………………………………………（7 分）

（2）由题意易知：$\mu=11$，$\sigma=2.6$，

又$8.4=11-2.6=\mu-\sigma$，$16.2=11+2.6\times2=\mu+2\sigma$，

所以$P(8.4<t\leqslant16.2)=P(\mu-\sigma<t\leqslant\mu+2\sigma)=\frac{0.6827+0.9545}{2}=0.8186$，

所以$P(t\leqslant\mu-\sigma\text{ 或 }t>\mu+2\sigma)=1-0.8186=0.1814$，

所以$Y\sim B(10,\ 0.1814)$，

所以$P(Y\geqslant2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=1-\mathrm{C}_{10}^{0}\times0.8186^{10}-\mathrm{C}_{10}^{1}\times0.1814\times0.8186^{9}\approx0.566$.

……………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）因为$P(\sqrt{3},\ 1)$在椭圆上，所以$\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^2-4}=1\Rightarrow a^2=6\text{或}a^2=2(\text{舍})$，

所以$C$的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.　……………………………………………（4 分）

（2）如图 2，设$M(m,\ 2)$，设$l_1$，$l_2$的斜率分别为$k_1$，$k_2$，

则$l_1$，$l_2$的方程为$y-2=k(x-m)$(其中$k=k_1$，$k_2$)，

由$\begin{cases}y-2=k(x-m),\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$

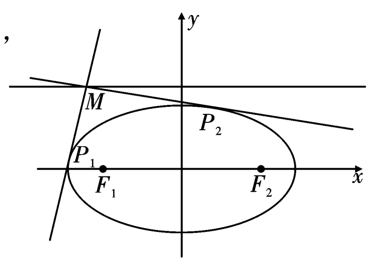

图 2

得$(3k^2+1)x^2+6k(2-km)x+3(2-km)^2-6=0$，①

关于$x$的方程①的判别式$\Delta=36k^2(2-km)^2-4(3k^2+1)[3(2-km)^2-6]=0$，

化简，得$(km-2)^2-2(3k^2+1)=0\Rightarrow(m^2-6)k^2-4mk+2=0$，②

关于$k$的方程②有两个实根$k_1$，$k_2$分别是切线$MP_1$，$MP_2$的斜率，

又$k_1k_2=-1$，故$\frac{2}{m^2-6}=-1$，解得$m=\pm2$，

所以 $M(-2, 2)$ 或 $M(2, 2)$. ……………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

证明：（1）由于 $f'(x)=\ln x$，则 $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-1$，

又 $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{2}{\mathrm{e}}$，所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处的切线方程为 $y+\frac{2}{\mathrm{e}}=-\left(x-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$，

即 $y=g(x)=-x-\frac{1}{\mathrm{e}}$， ……………………………………………（2 分）

令 $h(x)=f(x)-g(x)=x(\ln x-1)+x+\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $h'(x)=\ln x+1$，

于是当 $x\in\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$h'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}, +\infty\right)$ 上单调递增，

故 $h(x)\geqslant h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$，即 $f(x)\geqslant g(x)$. ……………………………………………（5 分）

（2）不妨设 $x_1<x_2$，直线 $y=-x-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 与 $y=a$ 相交于点 $(x_0, a)$，

又由（1）知：$f(x)\geqslant g(x)$，则 $a=-x_0-\frac{1}{\mathrm{e}}=f(x_1)\geqslant g(x_1)=-x_1-\frac{1}{\mathrm{e}}$，

从而 $x_1\geqslant x_0=-a-\frac{1}{\mathrm{e}}$，当且仅当 $x_0=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$a=-\frac{2}{\mathrm{e}}$ 时取等号.

……………………………………………（8 分）

下证：$x_2\leqslant a+\mathrm{e}$.

由于 $a=f(x_2)$，所以 $x_2\leqslant a+\mathrm{e}\Leftrightarrow x_2\leqslant f(x_2)+\mathrm{e}$，即证：$f(x_2)-x_2+\mathrm{e}\geqslant 0$，

令 $\varphi(x)=f(x)-x+\mathrm{e}=x\ln x-2x+\mathrm{e}$，则 $\varphi'(x)=\ln x-1$，

当 $x\in(0, \mathrm{e})$ 时，$\varphi'(x)<0$；

当 $x\in(\mathrm{e}, +\infty)$，$\varphi'(x)>0$；

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, \mathrm{e})$ 上单调递减，在 $(\mathrm{e}, +\infty)$ 上单调递增；

故 $\varphi(x)\geqslant\varphi(\mathrm{e})=0$，即 $x_2\leqslant a+\mathrm{e}$ 成立，当且仅当 $x_2=\mathrm{e}$，$a=0$ 时取等号.

…………………………………………………（11 分）

由于等号成立的条件不能同时满足，

所以$|x_1-x_2|=x_2-x_1<(a+\mathrm{e})-\left(-a-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2a+\mathrm{e}+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

…………………………………………………（12 分）