重庆市第八中学2021届高考适应性月考卷（五）
数学参考答案

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	B	D	C	C	A	B

【解析】

1．$z=\dfrac{2-\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+1=1-\mathrm{i}\Rightarrow \bar{z}=1+\mathrm{i}$，故共轭复数$\bar{z}$对应的点在第一象限，故选A.

2．“若$\neg p$，则q”即“若$x\leqslant 2$，则$x<3$”是真命题，故选C.

3．$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AC}$，又$G$为线段$CD$上一点，则$\dfrac{2}{3}+\lambda=1\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{3}$，故选B.

4．设第n个单音的频率为a_n，因为每一个单音与前一个单音频率比为$\sqrt[12]{2}$，所以$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\sqrt[12]{2}$ $(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$，又$a_1=f$，故数列$\{a_n\}$是首项为$f$，公比为$\sqrt[12]{2}$的等比数列，则$a_5=a_1q^4=f(\sqrt[12]{2})^4=2^{\frac{1}{3}}f$，故选D.

5．$\because AP\perp BP$，$\therefore \angle APO=45^\circ$，又$AO=\sqrt{2}$，$\therefore PO=2$，即$P$在以$O(0,\ 0)$为圆心，以2为半径的圆上，又点$P$在直线$y=kx+4$上，$\therefore \dfrac{|4|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2$，解得$k\geqslant\sqrt{3}$ $(k\in\mathbf{R}^+)$，即实数k的最小值为$\sqrt{3}$，故选C.

6．从1，2，3，5，6，7中任取三个不同数字形成三位数个数$\mathrm{A}_6^3=120$，将6个数分成3组，1与7，2与6，3与5，则可以与剩下的三个数字所形成的某个三位数之和为888的三位数的个数为$\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{A}_3^3=48$，故所求概率为$\dfrac{48}{120}=\dfrac{2}{5}$，故选C.

7．$\sin10^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\tan10^\circ=\dfrac{2\sin20^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ}{4\cos10^\circ}=\dfrac{2\sin(30^\circ-10^\circ)+\sqrt{3}\sin10^\circ}{4\cos10^\circ}=\dfrac{\cos10^\circ}{4\cos10^\circ}=\dfrac{1}{4}$，故选A.

8．由$f(1+x)=f(1-x)$，得$f(-x)=f(2+x)$ ①；由$f(2+x)=-f(2-x)$，得$f(-x)=-f(4+x)$ ②．所以$f(2+x)=-f(4+x)$，即$f(x+2)=-f(x)$ ③，从而$f(x+4)=-f(x+2)$

$=f(x)$ ④，所以 $f'(x+4)=f'(x)$，故 $f'(x)$ 是周期函数，周期为 4．又由①④，得 $f(-x)=f(2+x)=-f(x)$，所以 $f(x)=-f(-x)$，$f'(x)=-[f(-x)]'=f'(-x)$，故 $f'(x)$ 是偶函数，故选 B．

二、选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分）

题号	9	10	11	12
答案	AC	BC	ABC	BCD

【解析】

9．由图得高一年级每天的平均体育锻炼时间从小到大依次为 30，35，55，65，70，70，72，高二年级每天的平均体育锻炼时间从小到大依次为 30，30，35，65，83，88，90，故 A 正确，B．错误，应为 65；C．正确，D．错误，故选 AC．

10．由于 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_{2019}>S_{2021}>S_{2020}$，所以 $S_{2021}-S_{2020}=a_{2021}>0$，$S_{2021}-S_{2019}=a_{2021}+a_{2020}<0$，即 $-a_{2020}>a_{2021}>0$ ①，故 $|a_{2020}|>|a_{2021}|$，故 A 错误；又 $a_{2019}+a_{2022}=a_{2020}+a_{2021}<0$，所以 $-a_{2019}>a_{2022}>0$ ②，由不等式性质知①×②得 $a_{2019}a_{2020}>a_{2021}a_{2022}$，故 B 正确；由题 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}$，则显然 $d>0$，即数列 $\{a_n\}$ 单调递增，且满足 $a_1<0$，$a_2<0$，…，$a_{2020}<0$，$a_{2021}>0$，…，∴ $\dfrac{1}{b_1}$，$\dfrac{1}{b_2}$，…，$\dfrac{1}{b_{2018}}$ 都是负数；$\dfrac{1}{b_{2019}}>0$，$\dfrac{1}{b_{2020}}<0$；$\dfrac{1}{b_{2021}}$，$\dfrac{1}{b_{2022}}$，…都是正数，且 $\dfrac{1}{b_{2019}}+\dfrac{1}{b_{2020}}<0$，∴而 T_{2020} 取得最小值，故 C 选项正确；又数列 $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{a_na_{n+1}a_{n+2}}=\dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{1}{a_na_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$，$T_n=\dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{1}{a_1a_2}-\dfrac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}\right)$，而 $\dfrac{1}{a_{2020}a_{2021}}<0$，∴ $T_{2019}=\dfrac{1}{2d}\left(\dfrac{1}{a_1a_2}-\dfrac{1}{a_{2020}a_{2021}}\right)>\dfrac{1}{2da_1a_2}$，故 D 选项错误，故选 BC．

11．对选项 A，$g(x)=\ln 2x=\ln x+\ln 2=f(x)+\ln 2$，所以 $g(x)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象向上平移 $\ln 2$ 个单位得到；对于选项 B，$g(x)=2\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln 2}=f(x+\ln 2)$，所以 $g(x)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象向左平移 $\ln 2$ 个单位得到；对于选项 C，$g(x)=\cos 2x=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=f\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，所以 $g(x)$ 的图象可由 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位得到；对于

选项 D，$g(x)=\sin 2x$ 的图象只能由 $f(x)=\sin x$ 的图象通过变换“纵坐标不变，横坐标压缩为原来的$\frac{1}{2}$”得到，不能通过平移变换实现，故选 ABC.

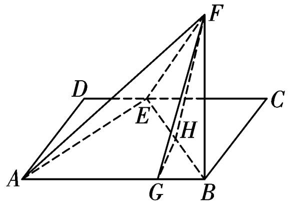

图 1

12．如图 1，对 A：若 $BF\perp$平面 AEF，则有 $BF\perp AF$，在 Rt△AFB 中，易知 $BG=t=\frac{1}{2}$；故 A 错误；对 B：若 $AF\perp$平面 BEF，则有 $AF\perp FB$，$AF\perp FE$，在 Rt△AFB 中，$AF=\sqrt{3}$，在 Rt△AEF 中，由勾股定理知：$AF^2+EF^2=AE^2$，即 $(\sqrt{3})^2+s^2=(2-s)^2+1^2$，解得 $s=\frac{1}{2}$，故 B 正确；对 C：若平面 $BEF\perp$平面 $ABED$，过 F 作 $FH\perp EB$，垂足为 H，连接 HG，易知 $FH\perp$平面 $ABED$，$\therefore FH\perp AB$，又 $AB\perp FG$，$\therefore AB\perp$平面 FHG，$\therefore AB\perp HG$．$\because s=1$，$\therefore$在等腰 Rt△FEB 中，$BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，在 Rt△BGH 中，$BG=t=\frac{1}{2}$，故 C 正确；对 D：若平面 $AFB\perp$平面 $ABED$，易知 $FG\perp$平面 $ABED$，$\therefore FG\perp BE$，过 F 作 $FH\perp EB$，垂足为 H，连接 HG，$\therefore BE\perp$平面 FGH，$\therefore BE\perp HG$，$\therefore$在矩形 $ABCD$ 中连接 CH，则有 C，H，G 三点共线，由 Rt△CBG~Rt△CBE 知，$BG=t=\frac{2}{3}$，故 D 正确，故选 BCD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{5}{2}$	$\left(1,\ \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$

【解析】

13．设圆锥的母线长为 l，底面半径为 r，因为圆锥的侧面展开图的扇形的弧长等于圆锥底面周长，所以$\frac{1}{2}\times 2\pi\cdot l=2\pi r$，解得 $l=2r$，所以圆锥的高为 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}r$，因为圆锥的侧面积为 8π，则 $\pi rl=2\pi r^2=8\pi$，解得 $r=2$，所以该圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi 2^2\cdot 2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

14．$\tan A+\tan C+\sqrt{3}\tan A\cdot\tan C=\sqrt{3}\Rightarrow \tan A+\tan C=\sqrt{3}(1-\tan A\cdot\tan C)$，$\tan(A+C)=\frac{\tan A+\tan C}{1-\tan A\cdot\tan C}=\sqrt{3}$，$0<A+C<\pi\Rightarrow A+C=\frac{\pi}{3}$，又

$\begin{cases}\sin A \cdot \cos C = \dfrac{\sqrt{3}}{4}, \\ \sin(A+C) = \sin A \cdot \cos C + \cos A \cdot \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 故 $\cos A \cdot \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，故 $\sin(A-C)=0 \Rightarrow$

$A=C=\dfrac{\pi}{6}$，又 $a=c=2$，$b=\sqrt{a^2+c^2+ac}=2\sqrt{3}$.

15. 由 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{ab}$，得 $2a+b=2$，所以 $ab=\dfrac{1}{2}\cdot 2ab \leqslant \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2a+b}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$ 时，等号成立．从从而 $4a^2+ab+b^2=(2a+b)^2-3ab=4-3ab \geqslant \dfrac{5}{2}$，故 $4a^2+ab+b^2$ 的最小值为 $\dfrac{5}{2}$.

16. 设 $P(x_0, y_0)$，设 $y=-\dfrac{b}{a}x+d$ 是过点 P 且与渐近线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 平行的直线，交 y 轴于点 $D(0, d)$，与渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 交于 $M(x_1, y_1)$，则 $d=\dfrac{bx_0+ay_0}{a}$，$x_1=\dfrac{bx_0+ay_0}{2b}$，

$\therefore S_{\triangle DOM}=\dfrac{1}{2}|x_1\cdot d|$，平行四边形 $OMPN$ 的面积 $S_{\square OMPN}=|x_0\cdot d|-|x_1\cdot d|=|x_0-x_1|\cdot d=$ $\left|\dfrac{(bx_0-ay_0)(bx_0+ay_0)}{2ab}\right|=\dfrac{a^2b^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2}$，$\therefore \triangle OMN$ 的面积 $S=\dfrac{ab}{4}\geqslant\dfrac{b^2}{2}$，解得 $\dfrac{b}{a}\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以离心率 $e\in\left(1, \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

解：由条件，知 $\cos x \neq 1$，所以 $x \neq 2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2\cos x+1}{\cos x-1}$

$=\dfrac{2\cos^2 x-2\cos x}{\cos x-1}$

$=2\cos x$. ……………………………………………………（3 分）

（1）因为 $\cos x\in[-1, 1)$，所以 $f(x)$ 的值域为 $[-2, 2)$.

……………………………………………………（5 分）

（2）$y=f\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $2k\pi-\pi<2x-\frac{\pi}{3}<2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

得 $k\pi-\frac{\pi}{3}<x<k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

又因为 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 0$，所以 $-\frac{\pi}{3}<x\leqslant 0$.

故 $y=f\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$ 上单调递增.

……………………………………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题：$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，因为 $a_1=3$，$a_2=7$，$a_2-a_1=4$，

所以 $a_{n+1}-a_n=4$，则数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，4 为公差的等差数列，

则 $a_n=3+4(n-1)=4n-1$，

又因为 $S_n=2b_n-1$ 且 $S_{n-1}=2b_{n-1}-1(n\geqslant 2)$，则 $b_n=2b_{n-1}$，且 $b_1=1$，

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，则 $b_n=2^{n-1}$.

……………………………………………………（6 分）

（2）由（1），设数列 $\{c_n\}$ 的前 50 项中有 m 项来源于 $\{b_n\}$，有 n 项来源于 $\{a_n\}$，

则 $\begin{cases}b_m<a_n<b_{m+1},\\ m+n=50,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2^{m-1}<4n-1<2^m,\\ m+n=50,\end{cases}$

解得 $m=8$，$n=42$，

故 $c_1+c_2+\cdots+c_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{42})+(b_1+b_2+\cdots+b_8)$

$=42\times3+\frac{42\times41}{2}\times4+\frac{1\times(1-2^8)}{1-2}=3825$.

……………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）事件 AB 包含 6 种情况：甲同学第 1，2，4 天 6：30 之前到校；甲同学第 1，2，5 天 6：30 之前到校；甲同学第 2，3，5 天 6：30 之前到校；甲同学第 1，3，4 天 6：30 之前到校；甲同学第 1，4，5 天 6：30 之前到校；甲同学第 2，4，5 天 6：30 之前到校，

故 $P(AB)=6\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{16}{81}$.

又 $P(A)=C_5^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$,

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{5}$. ……………………………………………………（4 分）

或 $P(B|A)=\frac{6}{C_5^3}=\frac{3}{5}$. ……………………………………………（4 分）

（2）对于每一天甲乙同学同时在 6：30 之前到校的概率为 $\frac{1}{2}$,

由独立性知：$X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$，则 $E(X)=\frac{5}{2}$. ……………………………………（7 分）

（3）随机变量 Y 的所有可能的取值为 2，3，4，5，

则 $P(Y=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(Y=3)=3\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{9}{16}$,

$P(Y=4)=4\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{9}{32}$，$P(Y=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$,

因此，随机变量 Y 的分布列为

Y	2	3	4	5
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{32}$

则 $E(Y)=\frac{1}{4}+\frac{27}{16}+\frac{9}{8}+\frac{5}{32}=\frac{103}{32}$. ……………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由离心率为 $\frac{1}{2}$，得 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{4}=\frac{a^2-b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,

令 $a^2=4\lambda$，$b^2=3\lambda$，则椭圆 C：$3x^2+4y^2=12\lambda$, ………………（2 分）

又 $N(4,0)$,

直线 PN：$y=-\frac{1}{2}x+2$ 与椭圆联立得到：$x^2-2x+4-3\lambda=0$,

由直线 PN 与椭圆 C 有且只有一个公共点（相切）得 $\Delta=4-4(4-3\lambda)=0\Rightarrow\lambda=1$,

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$． ……………………………………………………（5 分）

（2）$P\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，$Q\left(-1,\ -\frac{3}{2}\right)$，注意到 Q 与 P 均在椭圆上，

先证 $k_{MP}\bullet k_{MQ}=-\frac{3}{4}$， …………………………………………………………（6 分）

设 $M(x_0,\ y_0)$，则 $k_{MP}\bullet k_{MQ}=\dfrac{y_0-\frac{3}{2}}{x_0-1}\bullet\dfrac{y_0+\frac{3}{2}}{x_0+1}=\dfrac{y_0^2-\frac{9}{4}}{x_0^2-1}=\dfrac{3-\frac{3}{4}x_0^2-\frac{9}{4}}{x_0^2-1}=-\frac{3}{4}$，

设直线 PM：$y=k(x-1)+\frac{3}{2}$，QM：$y=-\frac{3}{4k}(x+1)-\frac{3}{2}$，

得 $A\left(4,\ 3k+\frac{3}{2}\right)$，$B\left(4,\ -\frac{15}{4k}-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow|AB|=\left|3k+\frac{15}{4k}+3\right|\left(k\neq-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$，

…………………………………………………………（9 分）

$3k+\frac{15}{4k}\geqslant3\sqrt{5}(k>0)$ 或 $3k+\frac{15}{4k}\leqslant-3\sqrt{5}(k<0)$，

$A\left(4,\ 3k+\frac{3}{2}\right)$，$B\left(4,\ -\frac{15}{4k}-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow|AB|=\left|3k+\frac{15}{4k}+3\right|_{\min}=|3\sqrt{5}-3|$，

当且仅当 $\begin{cases}3k=\frac{15}{4k},\\ k<0\end{cases}\Rightarrow k=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时，

$|AB|_{\min}=3\sqrt{5}-3$． ……………………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）证明：如图 2，连接 OC，交 AB 于点 D，

O 为 $\triangle ABC$ 的外心，

$AC=BC=1$，$OA=OB=OC$，

故 $\triangle OAC\cong\triangle OBC$，

$\therefore\angle ACO=\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ACB=60°$．

故 $\triangle OAC$ 和 $\triangle OBC$ 都是等边三角形，

故平行四边形 $ACBO$ 为菱形，

故 OB 与 AC 平行且相等．

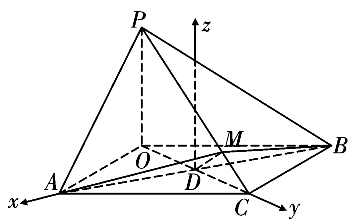

图 2

再由 $AC \subset$ 平面 PAC，OB 不在平面 PAC 内，可得 $BO//$ 平面 PAC.

因为 BO 到平面 PAC 的距离即为点 O 到平面 PAC 的距离 d，

$\therefore V_{P-OAC}=V_{O-PAC}$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times d$，

解得 $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………（6 分）

（2）解：$\because BC//$ 平面POA，$BC\subset$ 平面PBC，

平面 $PAO\cap$ 平面 $PBC=l$，$\therefore BC//l$，

以点 D 为原点建系如图，易得 $\overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，

$\therefore \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2}(1-\lambda)\right)$，$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，

设 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为平面 ABM 的法向量，

$\therefore \begin{cases} x_1=0, \\ \left(\frac{2\lambda-1}{2}\right)y_1+\frac{\sqrt{6}}{2}(1-\lambda)z_1=0, \end{cases}$ 解得 $\overrightarrow{n_1}=\left(0,\ 2,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1-2\lambda}{1-\lambda}\right)\right)$，

$\therefore \sin\alpha=\cos\langle\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{BC}\rangle=\frac{1}{\sqrt{4+\frac{2}{3}\left(2-\frac{1}{1-\lambda}\right)^2}}\leqslant\frac{1}{2}$，$\lambda=\frac{1}{2}$ 时取得最大值，

此时 $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 2,\ 0)$，$M\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$，易得平面 BMO 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ -2)$，

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

（1）解：$f'(x)=ae^{ax}-1$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单减，不存在极值，舍去；

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=-\frac{1}{a}\ln a$，又由 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增知，

当 $x\in\left(-\infty,\ -\frac{1}{a}\ln a\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单减；

当 $x\in\left(-\frac{1}{a}\ln a,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单增，

∴ $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{a}\ln a$ 处取极小值，符合题意.

综上，$a>0$. ……………………………………………………（6 分）

（2）证明：由（1）知，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取极小值 $f(0)=0$，

故有 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，即 $\mathrm{e}^x>1+x(x\neq 0)$，

取 $x=-\frac{k}{n+m}$，有 $1-\frac{k}{n+m}<\mathrm{e}^{-\frac{k}{n+m}}$，即 $\left(1-\frac{k}{n+m}\right)^{n+m}<\mathrm{e}^{-k}=\frac{1}{\mathrm{e}^k}$ 成立；

其中$(k, n, m\in\mathbf{N}_+, k\in\{1, 2, \cdots, m\})$，

对两边求和有 $\sum\limits_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{n+m}\right)^{n+m}<\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{\mathrm{e}^k}$，

即有 $\sum\limits_{k=1}^{m}\left(\frac{n+m-k}{n+m}\right)^{n+m}<\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^m}\right)}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}}=\frac{1}{\mathrm{e}-1}-\frac{1}{\mathrm{e}-1}\bullet\frac{1}{\mathrm{e}^m}<\frac{1}{\mathrm{e}-1}$ 成立，

即 $\sum\limits_{k=1}^{m}(n+m-k)^{n+m}<\frac{(n+m)^{n+m}}{\mathrm{e}-1}$，

也即 $n^{n+m}+(n+1)^{n+m}+\cdots+(n+m-1)^{n+m}<\frac{(n+m)^{n+m}}{\mathrm{e}-1}$ 成立.

……………………………………………………（12 分）