



重庆南开中学高 2021 级高三第二次质量检测

数学试题

2020.10

命题单位:重庆南开中学

(考试时间:120 分钟 试卷满分:150 分)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

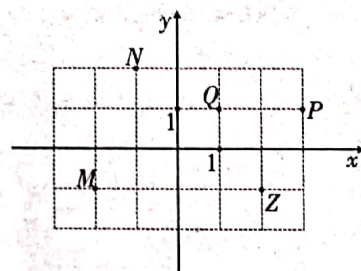
一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2(x-1) < 0\}$, $B = \{x | -2 < x \leq 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$
C. $[-2, 2)$ D. $(-2, 2]$

2. 设 i 为虚数单位,如图,网格纸上小正方形的边长为 1,图中复平面内点 Z 表示复数 z ,则表示复数 $(1+i) \cdot z$ 的点是

- A. M B. N
C. P D. Q



3. 为了解高三学生对“社会主义核心价值观”的学习情况,现从全年级 1004 人中抽取 50 人参加测试. 首先由简单随机抽样剔除 4 名学生,然后剩余的 1000 名学生再用系统抽样的方法抽取,则

- A. 每个学生入选的概率均不相等 B. 每个学生入选的概率可能为 0
C. 每个学生入选的概率都相等,且为 $\frac{25}{502}$ D. 每个学生入选的概率都相等,且为 $\frac{1}{20}$

4. 已知 $\tan \alpha = 2$, 则 $\frac{1 + \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha} =$

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. 4 D. 5

5. 函数 $f(x) = \frac{\cos x - a}{e^x}$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处取得极值,则

- A. $a = 1$, 且 $\frac{\pi}{2}$ 为极大值点 B. $a = 1$, 且 $\frac{\pi}{2}$ 为极小值点
C. $a = -1$, 且 $\frac{\pi}{2}$ 为极大值点 D. $a = -1$, 且 $\frac{\pi}{2}$ 为极小值点

6. 设 $a = 0.2^{0.3}$, $b = \log_2 3$, $c = \log_3 4$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$



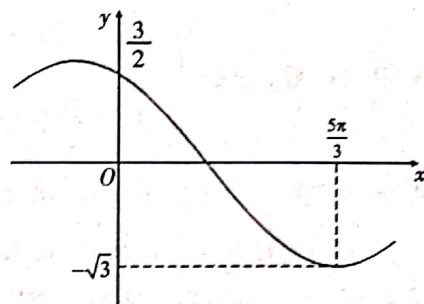
7. 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的部分图象如图所示, 则

A. $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)$

C. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



8. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 若对任意实数 x , 都有 $x[f'(x) - f(x)] + f(x) > 0$, 且 $f(1) = 2020e$, 则不等式 $xf(x) - 2020e^x \geq 0$ 的解集为

A. $[1, +\infty)$

B. $(-\infty, 1]$

C. $(0, 2020]$

D. $(1, 2020]$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. 下列函数中, 既是奇函数, 又是增函数的为

A. $y = 2^x - 2^{-x}$

B. $y = x - \frac{1}{x}$

C. $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

D. $y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$

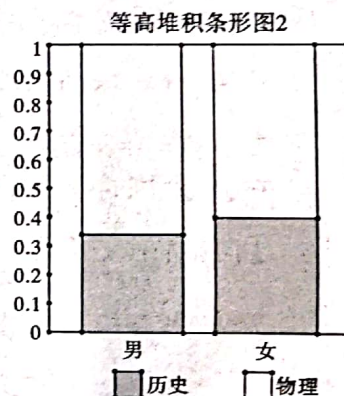
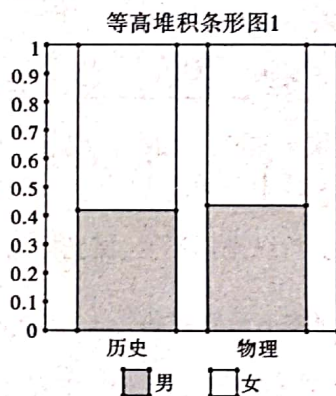
10. 某中学高一年级半期考试后将进行新高考首选科目的选择, 每位同学必须在“物理”、“历史”中二选一。学校采用分层抽样的方法, 抽取了该年级部分男、女学生选科意愿的一份样本, 并根据统计结果绘制如右两个等高堆积条形图。根据这两幅图中的信息, 下列统计结论正确的是

A. 该年级男生数量多于女生数量

B. 样本中对物理有意愿的学生数量多于对历史有意愿的学生数量

C. 样本中对物理有意愿的男生人数多于对历史有意愿的男生人数

D. 样本中对历史有意愿的女生人数多于对物理有意愿的女生人数



11. 下列说法正确的有

A. $\exists \alpha, \beta$, 使 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$

B. $\forall \alpha, \beta$, 有 $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

C. $\exists \alpha, \beta$, 使 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$

D. $\forall \alpha, \beta$, 有 $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$

12. 已知函数 $f(x) = x \sin x, x \in \mathbf{R}$, 则下列说法正确的有

A. $f(x)$ 是偶函数

B. $f(x)$ 是周期函数

C. 在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上, $f(x)$ 有且只有一个极值点

D. 过 $(0, 0)$ 作 $y = f(x)$ 的切线, 有且仅有 3 条



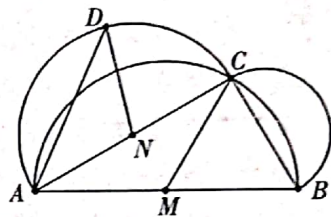
三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & x \geq \frac{1}{2} \\ f(1-x) & x < \frac{1}{2} \end{cases}$, 则 $f\left(-\frac{2}{3}\right) =$ _____.

14. 已知实数 a, b 满足 $|\ln a| = |\ln b|, a \neq b$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 _____.

15. 2020 年国庆档上映的影片有《夺冠》,《我和我的家乡》,《一点就到家》,《急先锋》,《木兰·横空出世》,《姜子牙》,其中后两部为动画片. 甲、乙两位同学都跟随家人观影,甲观看了六部中的两部,乙观看了六部中的一部,则甲、乙两人观看了同一部动画片的概率为 _____.

16. 如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形,此图由三个半圆构成,三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 AB 、直角边 BC 、 AC , M, N 分别为 AB, AC 的中点,点 D 在以 AC 为直径的半圆上. 已知以直角边 AC, BC 为直径的半圆的面积之比为 3, $\sin \angle DAB = \frac{4}{5}$, 则 $\cos \angle DNC =$ _____.



四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象上的各点 _____; 得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时,

方程 $g(x) = a$ 有解, 求实数 a 的取值范围.

在①、②中选择一个, 补在(2)中的横线上, 并加以解答, 如果①、②都做, 按①给分.

①向左平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位, 再保持纵坐标不变, 横坐标缩小为原来的一半;

②纵坐标保持不变, 横坐标缩小为原来的一半, 再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位.

18. (12 分) 2018 年至今, 美国对“中兴”、“华为”等中国高科技公司进行疯狂的打压, 引发国内“中国芯”研发热潮, 但芯片的生产十分复杂, 其中最重要的三种设备, 刻蚀机、离子注入机、光刻机所需的核心技术仍被一些欧美国家垄断. 国内某知名半导体公司组织多个科研团队, 准备在未来 2 年内全力攻关这三项核心技术. 已知在规定的 2 年内, 刻蚀机、离子注入机和光刻机所需的三项核心技术, 被科研团队 A 攻克的概率分别为 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, a$, 各项技术攻关结果彼此独立. 按照该公司对科研团队的考核标准, 在规定的 2 年内, 攻克刻蚀机、离子注入机所需的核心技术, 每项均可获得 30 分的考核分, 攻克光刻机所需的核心技术, 可获得 60 分的考核分, 若规定时间结束时, 某项技术未能被攻克, 则扣除该团队考核分 10 分. 已知团队 A 的初始分为 0 分, 设 2 年结束时, 团队 A 的总分为 X , 求:

(1) 已知团队 A 在规定时间内, 将三项核心技术都攻克的概率为 $\frac{1}{6}$, 求该团队恰能攻克三项核心技术中的一项的概率;

(2) 已知 $a = \frac{1}{2}$, 求总分 X 不低于 50 分的概率.



19. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax$, $g(x) = x - \sin x$

- (1) 求函数 $g(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最值;
- (2) 设 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分) 某电商平台为提升服务质量, 从用户系统中随机选出 300 名客户, 对该平台售前服务和售后服务的的评价进行统计, 得到一份样本数据, 并用以估计所有用户对该平台服务质量的满意度. 其中售前服务的满意率为 $\frac{13}{15}$, 售后服务的满意率为 $\frac{2}{3}$, 对售前服务和售后服务都不满意的客户有 20 人.

(1) 完成下面 2×2 列联表, 并分析是否有 97.5% 的把握认为售前服务满意度与售后服务满意度有关;

	对售后服务满意人数	对售后服务不满意人数	合计
对售前服务满意人数			
对售前服务不满意人数			
合计			

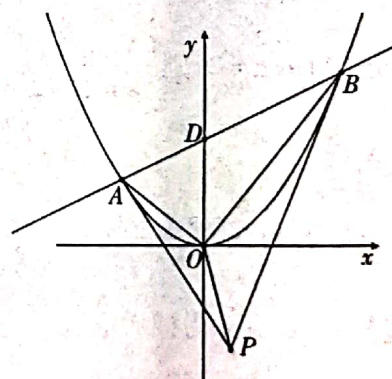
(2) 若用频率代替概率, 假定在业务服务协议终止时, 对售前服务和售后服务两项都满意的客户保有率为 95%, 只对其中一项不满意的客户保有率为 66%, 对两项都不满意的客户保有率为 15%, 从该运营系统中任选 3 名客户, 求在业务服务协议终止时, 保有客户人数 ξ 的分布列和期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12 分) 在平面直角坐标系中, 有定点 $F(0, 1)$, $M(-5, -1)$, 动点 P 满足 $|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OF}|$.

- (1) 求动点 P 的轨迹 Γ 的方程;
- (2) 过点 $D(0, 4)$ 作直线, 交曲线 Γ 于两点 A, B , 以 A, B 为切点作曲线 Γ 的切线, 交于点 P , 连接 OA, OB, OP .
 - (i) 证明: 点 P 在一条定直线上;
 - (ii) 记 S_1, S_2 分别为 $\triangle AOP, \triangle BOP$ 的面积, 求 $S_1 + S_2$ 的最小值.



22. (12 分) 函数 $f(x) = \frac{1}{m}e^{mx} - \frac{1}{2}x^2$, $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.

- (1) 若 $m = 1, x \in \mathbf{R}$, 证明: $f(x) + f(-x) \geq 2$;
- (2) 若 $m > 1$, 且对任意 $x \in (e, +\infty)$, $\frac{mx(mx-6) + 2f'(x)}{\ln x} \geq \ln x - 6$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

