

重庆南开中学高 2022 级高三（上）数学测试（8.11）

一、单项选择题

1. 集合 $A = \{x | 2x^2 - 7x - 4 \leq 0\}$, $B = \{x | |x| < 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-2, 3)$ B. $(-2, 3]$ C. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ D. $\left[-\frac{1}{2}, 3\right)$

2. 设复数 z 满足 $z(\sqrt{3}-i) = (1+i)^2$, 则 $|z| =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

3. 关于命题, 下列判断正确的是 ()

- A. 命题“每个正方形都是矩形”是存在量词命题
B. 命题“有一个素数不是奇数”是全称量词命题
C. 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, x^4 \in \mathbf{R}$ ”的否定为“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^4 \notin \mathbf{R}$ ”
D. 命题“每个整数都是有理数”的否定为“每个整数都不是有理数”

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} a^x, & (x < 0) \\ (a-2)x + 3a, & (x \geq 0) \end{cases}$, 满足对任意 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ 成立, 则 a 的

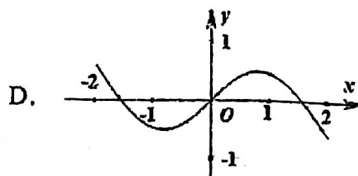
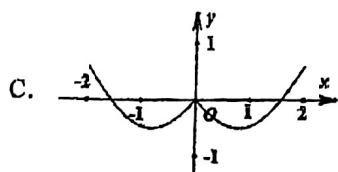
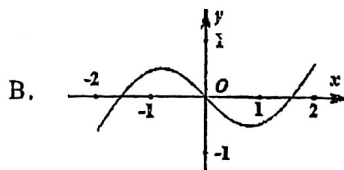
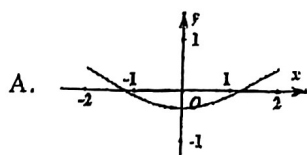
取值范围是 ()

- A. $a \in (0, 1)$ B. $a \in \left[\frac{3}{4}, 1\right)$ C. $a \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$ D. $a \in \left[\frac{3}{4}, 2\right)$

5. 函数 $f(x) = \sqrt{2\sin x - 1}$ 的奇偶性为 ()

- A. 奇函数 B. 既奇又偶函数 C. 偶函数 D. 非奇非偶函数

6. 函数 $f(x) = \cos x \cdot \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$ ($-2 \leq x \leq 2$) 的图象大致为 ()



7. 函数 $f(x) = e^{-x} - e^x$, 若 $a = 0.7^{-0.5}$, $b = \log_{0.5} 0.7$, $c = \log_{0.7} 5$, 则 ()

- A. $f(b) < f(a) < f(c)$ B. $f(c) < f(b) < f(a)$
C. $f(c) < f(a) < f(b)$ D. $f(a) < f(b) < f(c)$

8. 2021 年是巩固脱贫攻坚成果的重要一年, 某县为响应国家政策, 选派了 6 名工作人员到 A、B、C 三个村调研脱贫后的产业规划, 每个村至少去 1 人, 不同的安排方式共有 ()

- A. 630 种 B. 600 种 C. 540 种 D. 480 种

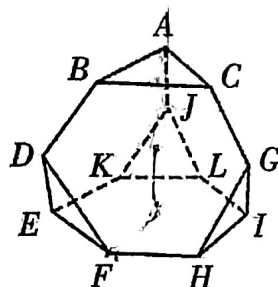
二、多项选择题

9. 对两个变量 y 和 x 进行回归分析, 得到一组样本数据: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. 由样本数据得到的回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 必过样本中心 $(\bar{x}, \bar{y})$
B. 残差平方和越小的模型, 拟合的效果越好
C. 用相关指数 R^2 来刻画回归效果, R^2 越小, 说明模型的拟合效果越好
D. 若变量 y 和 x 之间的相关系数为 $r = -0.9362$, 则变量 y 和 x 之间具有线性相关关系

10. 截角四面体是一种半正八面体, 可由四面体经过适当的截角, 即截去四面体的四个顶点所产生的多面体. 如图所示, 将棱长为 $3a$ 的正四面体沿棱的三等分点作平行于底面的截面得到所有棱长均为 a 的截角四面体, 则下列说法正确的是 ()

- A. 该截角四面体的表面积为 $7\sqrt{3}a^2$
B. 该截角四面体的体积为 $\frac{23\sqrt{2}}{12}a^3$
C. 该截角四面体的外接球表面积为 $\frac{11}{2}\pi a^2$
D. 该截角四面体中, 二面角 $A-BC-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$



11. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q = -\frac{2}{3}$, 等差数列 $\{b_n\}$ 的首项 $b_1 = 12$, 若 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$, 则以下结论正确的有 ()

- A. $a_9 \cdot a_{10} < 0$ B. $a_9 > a_{10}$ C. $b_{10} > 0$ D. $b_9 > b_{10}$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过抛物线 $x^2 = 2y$ 的焦点的直线 l 与该抛物线的两个交点为 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 则 ()

- A. $y_1 y_2 = \frac{1}{4}$ B. 以 AB 为直径的圆与直线 $y = -\frac{1}{2}$ 相切
C. $|OA| + |OB|$ 的最小值 $2\sqrt{2}$ D. 过 B 与 x 轴垂直的直线与 OA 交点在定直线上

三、填空题：

13. 给出下列说法：

- ①回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 恒过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$ ；
- ②两个变量相关性越强，则相关系数 $|r|$ 就越接近 1；
- ③某 7 个数的平均数为 4，方差为 2，现加入一个新数据 4，此时这 8 个数的方差不变；
- ④在回归直线方程 $\hat{y} = 2 - 0.5x$ 中，当变量 x 增加一个单位时， $\hat{y}$ 平均减少 0.5 个单位。

其中说法正确的是_____。

14. 若 $(x+2)^{2022} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2022}x^{2022}$ ，则 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2022}$ 被 4 除得的余数为_____。

15. 有以下四个条件：

- ① $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$ ，且其图象是一条连续不断的曲线；② $f(x)$ 是偶函数；
- ③ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不是单调函数；④ $f(x)$ 恰有两个零点。

若函数同时满足条件②④，请写出它的一个解析式 $f(x) =$ _____；若函数同时满足条件①

②③④，请写出它的一个解析式 $g(x) =$ _____。

16. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D ，若对任意 $x_1 \in D$ ，存在 $x_2 \in D$ ，使得 $f(x_1) \cdot f(x_2) = 1$ ，

则称函数 $f(x)$ 具有性质 M ，给出下列四个结论：

- ①函数 $y = x^3 - x$ 不具有性质 M ；②若函数 $y = \log_8(x+2)$ ， $x \in [0, t]$ 具有性质 M ，则 $t = 510$ ；
- ③函数 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 具有性质 M ；④若函数 $y = \frac{3\sin x + a}{4}$ 具有性质 M ，则 $a = 5$ 。

其中，正确结论的序号是_____。

四、解答题

17. 已知函数 $f(x) = \ln(e^x + 1) - ax$ 。

- (1) 若函数 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线的斜率为 0，求 a 的值；
- (2) 在第 (1) 问的前提下，讨论函数 $y = f(x)$ 的单调性及最值。

18. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点重合，抛物线 C 与椭圆的交于点 P ，延长 PF 交抛物线 C 于点 Q 。

- (1) 求抛物线 C 的方程；
- (2) 求 $|PQ|$ 的值。

19. 某行业主管部门为了解本行业疫情过后恢复生产的中小企业的生产情况，随机调查了 120 个企业，得到这些企业第二季度相对于前一年第二季度产值增长率 y 的频数分布表。

y 的分组	$[-0.4, -0.2)$	$[-0.2, 0)$	$[0, 0.2)$	$[0.2, 0.4)$	$[0.4, 0.6)$
企业数	30	24	40	16	10

- (1) 估计这些企业中产值负增长的企业比例 (用百分数表示);
- (2) 估计这 120 个企业产值增长率的平均数 (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);
- (3) 以表中 y 的分组中各组的频率为概率，某记者要从当地本行业所有企业中任意选取两个企业做采访调查。若采访的企业的增长率 $y \in [-0.4, -0.2)$ ，则采访价值为 1；采访的企业的增长率 $y \in [-0.2, 0)$ ，则采访价值为 2；采访的企业的增长率 $y \in [0, 0.6)$ ，则采访价值为 3。设选取的两个企业的采访价值之和为 X ，求 X 的分布列及数学期望。

20. 某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时，某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤，分析显示：当 S 中 $x\%$ ($0 < x < 100$) 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间为

$$f(x) = \begin{cases} 30, & 0 < x \leq 30 \\ 2x + \frac{1800}{x} - 90, & 30 < x < 100 \end{cases} \quad (\text{单位: 分钟}),$$

而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响，恒为 40 分钟，试根据上述分析结果回答下列问题：

- (1) 当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？
- (2) 求该地上上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$ 的表达式；讨论 $g(x)$ 的单调性，并说明其实际意义。

21. 已知圆 $F_1: (x+1)^2 + y^2 = r^2$ 与圆 $F_2: (x-1)^2 + y^2 = (4-r)^2$ ($1 \leq r \leq 3$) 的公共点的轨迹为曲线 E 。

- (1) 求 E 的方程；
- (2) 设点 A 为圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{12}{7}$ 上任意点，且圆 O 在点 A 处的切线与 E 交于 P, Q 两点。试问：

$\overline{AP} \cdot \overline{AQ}$ 是否为定值？若是，求出该定值；若不是，请说明理由。

22. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 。

- (1) 若直线 $y = kx - 1$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线，求实数 k 的值；
- (2) 若对任意 $x \in (0, +\infty)$ ，不等式 $f(x) \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x}$ 成立，求实数 a 的取值集合。

重庆南开中学高 2022 级高三（上）数学测试（8.11）参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	D	C	C	D	B	D	C	ABD	ABC	AD	ABD

13. ①②④ 14. 1 15. $f(x) = -x^2 + 2$, $g(x) = -x^2 + |x| + 2$ (答案不唯一) 16. ①②

17. 解: (1) $f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - a$, 由题意得 $f'(0) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$$(2) \text{ 由 (1) 有 } f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}$$

由 $f'(x) > 0$ 解得 $e^x > 1 \Rightarrow x > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减, $(0, +\infty)$ 单调递增

故而函数 $y = f(x)$ 存在最小值, $f(0) = \ln(e^0 + 1) = \ln 2$

18. 解: (1) 由题意: $F(1, 0)$, $\therefore P = 2$, 抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$.

$$(2) \text{ 设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} y^2 = 4x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } x_1 = \frac{2}{3},$$

$$\text{设 } PQ: x = my + 1, \text{ 由 } \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my - 4 = 0, \therefore y_1 y_2 = -4$$

$$\therefore x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{4} \cdot \frac{y_2^2}{4} = 1, \therefore x_2 = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore |PQ| = |PF| + |QF| = x_1 + x_2 + p = \frac{25}{6}.$$

19. 解: (1) 估计这些企业中产值负增长的企业比例为 $\frac{30+24}{120} \times 100\% = 45\%$.

(2) 这 120 个企业产值增长率的平均数

$$\bar{y} = \frac{1}{120}(-0.3 \times 30 - 0.1 \times 24 + 0.1 \times 40 + 0.3 \times 16 + 0.5 \times 10) = 0.02.$$

(3) 依题意可得 $y \in [-0.4, 0.2)$ 的概率为 $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$,

$y \in [-0.2, 0)$ 的概率为 $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$,

$y \in [0, 0.6)$ 的概率为 $\frac{40+16+10}{120} = \frac{11}{20}$.

X 的所有可能取值为 2, 3, 4, 5, 6,

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}; \quad P(X=3) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10};$$

$$P(X=4) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{11}{20} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{63}{200}; \quad P(X=5) = 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{11}{20} = \frac{11}{50};$$

$$P(X=6) = \frac{11}{20} \times \frac{11}{20} = \frac{121}{400},$$

则 X 的分布列为

X	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{63}{200}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{121}{400}$

$$\text{故 } E(X) = 2 \times \frac{1}{16} + 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{63}{200} + 5 \times \frac{11}{50} + 6 \times \frac{121}{400} = \frac{23}{5}.$$

20. 解 (1) ①当 $0 < x \leq 30$ 时, 自驾群体人均通勤时间为 30 分钟,

公交群体人均通勤时间为 40 分钟, 此时公交群体人均通勤时间大于自驾群体人均通勤时间。

②当 $30 < x < 100$ 时: 令 $f(x) > 40$, 得 $2x + \frac{1800}{x} - 90 > 40$, 解得: $0 < x < 20$ 或

$45 < x < 100$,

所以当 $45 < x < 100$ 时, 自驾群体的人均通勤时间大于 40 分钟, 此时公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间。

综上所述, 当 $45 < x < 100$ 时, 公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间。

(2) 当 $0 < x \leq 30$ 时, $g(x) = 30x\% + 40(1-x\%) = -0.1x + 40$,

当 $30 < x < 100$ 时, $g(x) = (2x + \frac{1800}{x} - 90)x\% + 40(1-x\%) = 0.02x^2 - 1.3x + 58$,

$$\text{所以 } g(x) = \begin{cases} -0.1x + 40, & 0 < x \leq 30 \\ 0.02x^2 - 1.3x + 58, & 30 < x < 100 \end{cases}$$

$$\text{所以 } g'(x) = \begin{cases} -0.1, & 0 < x \leq 30 \\ 0.04x - 1.3, & 30 < x < 100 \end{cases}$$

当 $0.04x - 1.3 = 0$ 时, $x = 32.5$ 。

所以当 $0 < x \leq 30$ 时, $g'(x) = -0.1 < 0$;

当 $30 < x \leq 32.5$ 时, $g'(x) \leq 32.5 \times 0.04 - 1.3 = 0$,

则 $g(x)$ 在 $(0, 32.5]$ 上单调递减,

当 $32.5 < x < 100$ 时, $g'(x) > 32.5 \times 0.04 - 1.3 = 0$,

则 $g(x)$ 在 $(32.5, 100)$ 上单调递增.

表示当自驾群体的范围在 $(0, 32.5\%]$ 时, 上班族的人均通勤时间随自驾群体的增加而减少; 当自驾群体占比为 32.5% 时, 人均通勤时间为最小值; 当自驾群体超过 32.5% 时, 上班族的人均通勤时间随自驾群体的增多而增加.

21. 解: (1) 设公共点为 P , 则 $|PF_1| = r$, $|PF_2| = 4 - r$, $|PF_1| + |PF_2| = 4 > |F_1F_2|$,

即公共点 P 的轨迹为椭圆, 且 $2a = 4$, $\therefore a = 2$, 又 $c = 1$, $\therefore b^2 = 3$, 故曲线 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 当直线 PQ 斜率不存在时, $PQ: x = \pm\sqrt{\frac{12}{7}}$,

代入 E 得 $y = \pm\sqrt{\frac{12}{7}}$, 故 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = -\frac{12}{7}$, 易知 $OP \perp OQ$;

当直线 PQ 斜率存在, 设 $PQ: y = kx + m$, PQ 与圆 O 相切, $\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = r \Rightarrow m^2 = \frac{12}{7}(k^2+1)$,

将 PQ 方程代入 E , 得 $(4k^2+3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2+3}, \quad x_1x_2 = \frac{4m^2-12}{4k^2+3},$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_1x_2 + (kx_1+m)(kx_2+m) = (k^2+1)x_1x_2 + km(x_1+x_2) + m^2$$

$$= \frac{(k^2+1)(4m^2-12)}{4k^2+3} - \frac{8k^2m^2}{4k^2+3} + m^2 = \frac{7m^2-12(k^2+1)}{4k^2+3},$$

将 $m^2 = \frac{12}{7}(k^2+1)$ 代入, 得 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 即 $OP \perp OQ$,

综上, 恒有 $OP \perp OQ$, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = -|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AQ}| = -|\overrightarrow{OA}|^2 = -\frac{12}{7}$.

22. 解: (1) 因为 $f(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$, 所以 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$,

设切点为 $P\left(x_0, \frac{\ln x_0}{x_0}\right)$, 此时切线方程为 $y - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(x - x_0)$,

又直线 $y = kx - 1$ 过 $(0, -1)$, 所以 $-1 - \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(0 - x_0)$, 即 $2\ln x_0 + x_0 - 1 = 0$,

令 $h(x) = 2\ln x + x - 1$ ，则 $h(1) = 0$ ，且 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

所以方程 $2\ln x_0 + x_0 - 1 = 0$ 有唯一解 $x_0 = 1$ ，所以 $k = 1$ 。

(2) 不等式 $f(x) \leq ax - 1 - \frac{\ln a}{x}$ 恒成立，即不等式 $ax^2 - x - \ln x - \ln a \geq 0$ 恒成立。

令 $F(x) = ax^2 - x - \ln x - \ln a$ ，则 $F'(x) = \frac{2ax^2 - x - 1}{x}$ ，

令 $G(x) = 2ax^2 - x - 1 = 0$ ，因为 $a > 0$ ，所以 $\Delta = 1 + 8a > 0$ ，

所以 $G(x) = 0$ 有两个不等根 x_1, x_2 ， $x_1 x_2 = -\frac{1}{2a} < 0$ ，不妨设 $x_1 < 0 < x_2$ ，

所以 $F(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上递减，在 $(x_2, +\infty)$ 上递增，

所以 $F(x)_{\min} = F(x_2) = ax_2^2 - x_2 - \ln(ax_2)$ 。

由 $G(x_2) = 2ax_2^2 - x_2 - 1 = 0$ ，得 $ax_2 = \frac{1+x_2}{2x_2}$ ，所以 $F(x_2) = \frac{1-x_2}{2} - \ln \frac{1+x_2}{2x_2}$

所以 $\frac{1-x_2}{2} - \ln \frac{1+x_2}{2x_2} \geq 0$ ，

令 $H(x) = \frac{1-x}{2} - \ln \frac{1+x}{2x} = \frac{1-x}{2} + \ln 2x - \ln(1+x)$ ，则 $H'(x) = -\frac{(x-1)(x+2)}{2x(x+1)}$ ，

所以 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递增，在 $(1, +\infty)$ 上递减，

所以 $H(x) \leq H(1) = 0$ ，

又 $F(x_2) \geq 0$ ，所以 $F(x_2) = 0$ ，所以 $x_2 = 1$ ，所以 $a = 1$ ，

所以，实数 a 的取值集合为 $\{1\}$ 。