

数学试题

2021.4

命题单位:重庆南开中学

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | 1 - a < x < 2a\}$, $N = (1, 4)$, 且 $M \subseteq N$, 则实数 a 的取值范围是
 - A. $(-\infty, 2]$
 - B. $(-\infty, 0]$
 - C. $(-\infty, \frac{1}{3}]$
 - D. $[\frac{1}{3}, 2]$
2. 过抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点,若 l 的倾斜角为 45° , 则线段 AB 的中点到 x 轴的距离是
 - A. $\frac{1}{2}$
 - B. 2
 - C. 4
 - D. 3
3. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (x, 2)$, 则“ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角”是“ $x > -3$ ”的
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件
4. 已知两条不同的直线 l, m 和不重合的两个平面 α, β , 且 $l // \beta$, 则下列说法正确的是
 - A. 若 $\alpha // \beta$, 则 $l // \alpha$
 - B. 若 $m \perp \beta$, 则 $l \perp m$
 - C. 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $l \perp \alpha$
 - D. 若 $l \perp m$, 则 $m \perp \beta$
5. 某校举行排球赛,其中 A, B, C, D 四个班分到一个组进行小组赛。赛前,小张,小李,小明,小红四人对这个小组的第一名至第四名进行了预测,分别是,小张:ABDC;小李:BCAD;小明:CDAB;小红:BCDA。比赛结束有了排名结果后发现,小张和小红预测对了两个班级的排名,小李和小明只预测对了—个班级排名,则最后获得第一名的是
 - A. A 班
 - B. B 班
 - C. C 班
 - D. D 班
6. 已知 $(1+x)^{2021} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{2021}x^{2021}$, 则 $a_{2020} + 2a_{2019} + 3a_{2018} + 4a_{2017} + \cdots + 2020a_1 + 2021a_0 =$
 - A. 2021×2^{2021}
 - B. 2021×2^{2020}
 - C. 2020×2^{2021}
 - D. 2020×2^{2020}
7. 已知函数 $f(x) = \sin x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 将 $f(x)$ 的图像向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位得到 $g(x)$ 的图像,实数 x_1, x_2 满足 $|f(x_1) - g(x_2)| = 2$, 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{4}$, 则 φ 的最小取值为
 - A. $\frac{\pi}{4}$
 - B. $\frac{\pi}{3}$
 - C. $\frac{\pi}{2}$
 - D. $\frac{3}{4}\pi$

8. 定义在 $(-2, 2)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 满足: $f(x) + e^{4x}f(-x) = 0$, $f(1) = e^2$, 且当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 2f(x)$, 则不等式 $e^{2x}f(2-x) < e^4$ 的解集为
- A. $(1, 4)$ B. $(-2, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, 1)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知复数 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (i 为虚数单位), 则下列说法中正确的是

- A. $z^3 = 1$ B. $z^2 = z$
C. $z^2 + z + 1 = 0$ D. $z + z^2 + \dots + z^{2021} = 0$

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = f(6-x)$, 且 $f(x+2) = f(x-2)$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) =$

$\ln(\sqrt{1+x^2} - x)$, 则下列说法正确的是

- A. $f(2021) = 0$
B. $x \in (2020, 2022)$ 时, $f(x)$ 单调递增
C. $f(x)$ 关于点 $(1010, 0)$ 对称
D. $x \in (-1, 11)$ 时, 方程 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的所有根的和为 30

11. 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle SAC, \triangle SBC$ 均是以 SC 为斜边的等腰直角三角形, $SA = \sqrt{6}$, $AB = a$, 则下列说法正确的是

- A. $SC \perp AB$
B. $a \in (0, 2\sqrt{2})$
C. 该三棱锥的外接球的表面积为 12π
D. 当 $a = 2\sqrt{2}$ 时, 过点 B 且与平面 CAB 和平面 SAB 所成角都为 15° 的直线共有 4 条

12. 曼哈顿距离(或出租车几何)是由十九世纪的赫尔曼·闵可夫斯基所创的词汇, 是一种使用在几何度量空间的几何学用语. 例如, 在平面上, 点 $P(x_1, y_1)$ 和点 $Q(x_2, y_2)$ 的曼哈顿距离为: $L_{PQ} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. 若点

$P(x_1, y_1)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 上一动点, $Q(x_2, y_2)$ 为直线 $l: kx - y - 2k - 4 = 0$ ($k \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$) 上一动点, 设 L

(k) 为 P, Q 两点的曼哈顿距离的最小值, 则 $L(k)$ 的可能取值有

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 正整数 n 满足 $C_{2n}^{2n} = C_{2n}^{18-n}$, 则 $n =$ _____.

14. 已知随机变量 ξ 的分布列如下表, $D(\xi)$ 表示 ξ 的方差, 则 $D(2\xi + 1) =$ _____.

ξ	0	1	2
p	a	$1-2a$	$\frac{1}{4}$

15. 已知事件 A, B 互斥, 且事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{1}{5}$, 事件 B 发生的概率 $P(B) = \frac{1}{3}$, 则事件 A, B 都不发生的概率是 _____.

16. 已知正数 x, y, z 满足 $x + y + 4z = 1$, 则 $\frac{-3 + 8(x^2 + y^2)}{z}$ 的最小值是 _____.

四、解答题:本题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)在 $\triangle ABC$ 中,内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ,且 $\left(a\cos^2 \frac{C}{2} + c\cos^2 \frac{A}{2}\right)(a+c-b) = \frac{3}{2}ac$.

(1)求角 B 的大小;

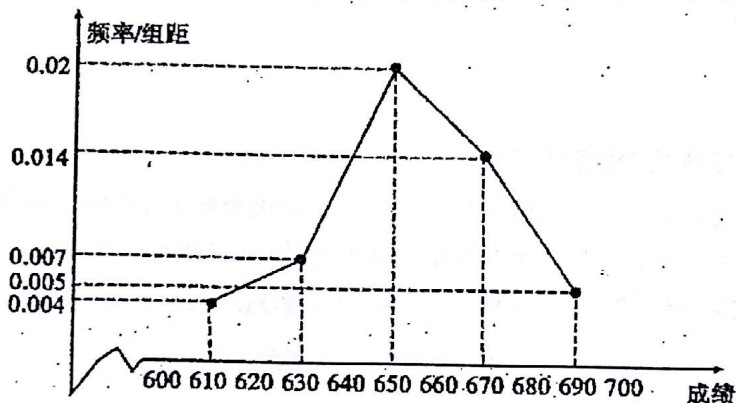
(2)若 $b=2\sqrt{3}, c=x(x>0)$,当 $\triangle ABC$ 仅有一解时,写出 x 的范围,并求 $a-c$ 的取值范围.

18. (12分)已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $4S_n+1=(a_n+1)^2$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n ;

(2)若有限数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_k=(a_k+1)C_n^k, k=1, 2, \dots, n$,求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

19. (12分)某中学在2020年高考分数公布后对高三年级各班的成绩进行分析.经统计,某班有50名同学,总分都在区间 $[600, 700]$ 内,将得分区间平均分成5组,统计频数、频率后,得到了如图所示的“频率分布”折线图.



(1)请根据频率分布折线图,画出频率分布直方图,并根据频率分布直方图估计该班级的平均分;

(2)经过相关部门的计算,本次高考总分大于等于680的同学可以获得高校T的“强基计划”入围资格.

高校T的“强基计划”校考分为两轮.第一轮为笔试,所有入围同学都要参加,考试科目为数学和物理,每科的笔试成绩从高到低依次有 A^+, A, B, C 四个等级,两科中至少有一科得到 A^+ ,且两科均不低于 B ,才能进入第二轮,第二轮得到“通过”的同学将被高校T提前录取.

已知入围的同学参加第一轮笔试时,总分高于690分的同学在每科笔试中取得 A^+, A, B, C 的概率分别为 $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}$;总分不超过690分的同学在每科笔试中取得 A^+, A, B, C 的概率分别为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$;进入第二轮的同学,若两科笔试成绩均为 A^+ ,则免面试,并被高校T提前录取;若两科笔试成绩

只有一个 A^+ ,则要参加面试,总分高于690分的同学面试“通过”的概率为 $\frac{2}{3}$,总分不超过690分的同学面试“通过”的概率为 $\frac{2}{5}$,面试“通过”的同学也将被高校T提前录取.

若该班级考分前10名都已经报考了高校T的“强基计划”,且恰有2人成绩高于690分.求

①总分高于690分的某位同学没有进入第二轮的概率 P_1 ;

②该班恰有两名同学通过“强基计划”被高校T提前录取的概率 P_2 .

20. (12 分) 如图 1, 菱形 $ABCD$ 中 $\angle ABC = 120^\circ$, 动点 E, F 在边 AD, AB 上 (不含端点), 且存在实数 λ 使 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{BD}$, 沿 EF 将 $\triangle AEF$ 向上折起得到 $\triangle PEF$, 使得平面 $PEF \perp$ 平面 $BCDEF$, 如图 2 所示.

(1) 若 $BF \perp PD$, 设三棱锥 $P-BCD$ 和四棱锥 $P-BDEF$ 的体积分别为 V_1, V_2 , 求 $\frac{V_1}{V_2}$;

(2) 试讨论, 当点 E 的位置变化时, 二面角 $E-PF-B$ 是否为定值, 若是, 求出该二面角的余弦值, 若不是, 说明理由.

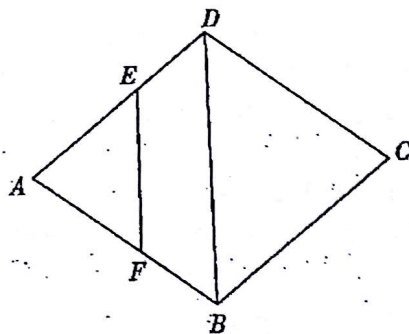


图1

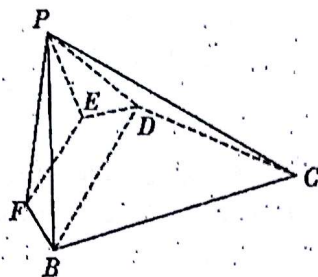


图2

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = -\frac{t}{3}x^3 + (2+t)x^2 - 8x - 4t + 7$.

(1) 当 $t > 0$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知函数 $g(x) = \ln x$, 记函数 $m(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$, 若函数 $m(x)$ 有三个零点, 求实数 t 的取值范围.

22. (12 分) 已知 $A(0, 2), B(0, -2)$, P 为坐标平面内一动点, 直线 PA, PB 的斜率 k_{PA}, k_{PB} 满足: $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{4}{3}$.

(1) 求动点 P 的轨迹 E 的方程;

(2) 过 E 上一点 N 作不与坐标轴平行的直线与 E 相切, 交 x 轴于点 D , O 为坐标原点, 试确定 y 轴上是否存在定点 Q , 使得 $|\cos \angle DNQ| = \frac{1}{2} \sin \angle ODN$? 若存在, 请求出点 Q 的坐标; 若不存在, 说明理由.