重庆南开中学高2021级高三第五次质量检测

数学试题

一、单项选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知a，b∈**R**，集合A＝{a＋5，a^2-1}，B＝{a，b}，若A∩B＝{3}，则A∪B＝

A．{-2，3}　　B．{2，3}　　C．{2，3，5}　　D．{2，3，7}

2．已知i是虚数单位，若复数$\frac{a-\mathrm{i}}{b+\mathrm{i}}=1-2\mathrm{i}$，其中a，b为实数，则|a＋bi|的值为

A．$\sqrt{10}$　　B．10　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

3．设m是直线，α、β是两个不同的平面，且α⊥β，则“m∥β”是“m⊥α”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．二项式$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{x}{2}\right)^9$的展开式中，常数项为

A．-672　　B．672　　C．-84　　D．84

5．将函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$（ω＞0）的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位后所得函数的图象关于直线$x=\frac{\pi}{6}$对称，则当ω取最小值时，函数f（x）的最小正周期为

A．3π　　B．2π　　C．$\frac{6\pi}{5}$　　D．$\frac{\pi}{2}$

6．已知函数$f(x)=\begin{cases}\cos\pi x, x\le 0\\ x^{-\frac{1}{2}}, 0<x\le 1\\ -f(x-1), x>1\end{cases}$，则$f\left(\frac{2021}{4}\right)=$

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．-2　　D．$-\frac{1}{2}$

7．过抛物线C：y^2＝4x的焦点F作倾斜角为$\frac{3}{4}\pi$的直线l交C于A、B两点，以C的准线

上一点 M 为圆心作圆 M 经过 A、B 两点，则圆 M 的面积为

A．96π　　B．48π　　C．32π　　D．16π

8．已知实数 a、b，满足 $a=\log_2 3+\log_6 4$，$3^a+4^a=5^b$，则关于 a、b 下列判断正确的是

A．a＜b＜2　　B．b＜a＜2　　C．2＜a＜b　　D．2＜b＜a

二、多项选择题：本题共 4 小题．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．

9．“读书破万卷，下笔如有神”、“腹有诗书气自华”，读书不仅能丰富知识、开阔视野，还能陶冶情操．但是随着学业内容的增加、升学压力的增大，学生的课外阅读也受到较大的影响．某小学为了了解学生的课外阅读情况，计划从四、五、六三个年级的学生中抽出总数的10％进行调查，已知四、五、六三个年级的学生人数之比为 9∶7∶10，则下列说法正确的是

A．应该采用系统抽样的方法

B．应该采用分层抽样的方法

C．每个学生被抽到的概率为$\dfrac{1}{10}$

D．若样本中五年级的学生比六年级的学生少 12 人，则三个年级的学生总共有 1140 人

10．设平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为非零向量，则下列命题中正确的是

A．若$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$，则$\vec{b}=\vec{c}$　　B．若$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$同向

C．若$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，则$\vec{a}\perp\vec{b}$　　D．若$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$，则$\vec{a}\,/\!/\,\vec{c}$

11．设集合 S 是由一些复数组成的一个非空集合，如果$\forall a,b\in S$，总有 a＋b，a-b，a·b∈S，则称 S 是一个数环．例如：整数集 **Z**，有理数集 **Q**，实数集 **R**，复数集 **C** 都是数环．则下列命题正确的是

A．集合 S＝{2n|n∈**Z**}是一个数环　　B．集合$S=\{\sqrt{2}n\mid n\in\mathbf{Z}\}$是一个数环

C．对任意两个数环 S、T，S∩T 都不是空集　　D．对任意两个数环 S、T、S∩T 都是数环

12．已知图 1 中的正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 2，体积为$2\sqrt{2}$，去掉其侧棱，再将上底面绕上下底面的中心所在直线逆时针旋转 180°后，添上侧棱，得到图 2 所示的几何体，则下列说法正确的是

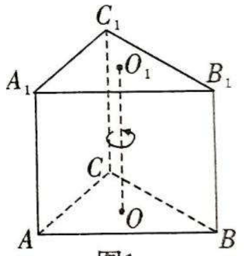


图1

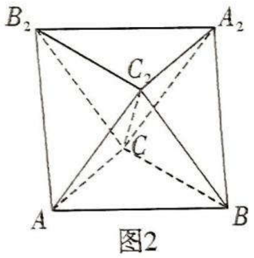


图2

A．A_2B_2∥平面 ABC

B．$AB_2=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

C．四边形 ABA_2B_2 为正方形

D．正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 与几何体 $ABCA_2B_2C_2$ 的外接球的体积相等

三、填空题：本题共 4 小题．

13．已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线方程为 y＝2x，则该双曲线的离心率为________．

14．已知向量 $\vec{a}=(1,3)$，$\vec{b}=(\sin\theta,\sin\theta-\cos\theta)$，若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 tan2θ＝________．

15．李华应聘一家上市公司，规则是从备选的 10 道题中抽取 4 道题测试，答对 3 道题及以上就可以进入面试．李华可以答对这 10 道题目中的 6 道题．若李华第一道题就答对了，则李华进入面试的概率为________．

16．毕达哥拉斯树是由毕达哥拉斯根据“勾股定理”所画出来的一个可以无限重复的图形，也叫“勾股树”，是由一个等腰直角三角形分别以它的每一条边向外作正方形而得到．现按照这种思想，以一个内角为 30°、斜边长为 2 个单位的直角三角形的每一条边向外作正方形得到“类勾股树”，图 1 为第 1 代“类勾股树”，重复图 1 的作法得到第 2 代“类勾股树”（如图 2），如此继续．则第 2 代“类勾股树”上的所有正方形的面积之和为________；第 n（n∈$\mathbf{N}^*$）代“类勾股树”上的所有正方形的面积之和为________．

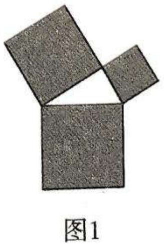


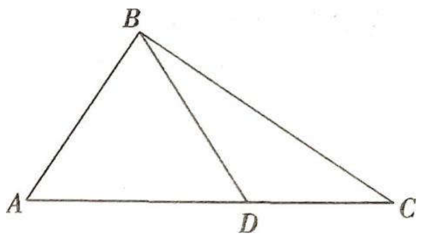
图1


图2

四、解答题：本题共 6 小题．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．在条件①（a-b）（sinA＋sinB）＝c（sinC-sinB）；②$b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$；③cos2A-cos2B＝2sinC（sinB-sinC）中任选一个，补充以下问题并解答：

如图所示，△ABC 中内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，________，且 BC＝3，D 在 AC 上，AB＝AD．



（1）若 BD＝2，求 sin∠ACB；

（2）若 BD＝2CD，求 AC 长．

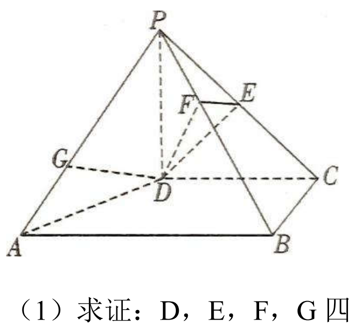
注：如果选择多个条件分别作答，则按第一个解答计分．

18． 已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和．

（1）求证：$a_{n+1}^2 \ge a_n a_{n+2}$；

（2）若 a_2＝3，a_3 是 a_1 和 S_3 的等差中项，设$b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{a_n}$，$T_n$ 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，求证：$T_n<\frac{3}{8}$．

19. 如图，四棱锥 P-ABCD 中，PD⊥平面 ABCD，梯形 ABCD 满足 AB∥CD，∠BCD＝90°，且 PD＝AD＝DC＝2，AB＝3，E 为 PC 中点，$\overline{PF}=\frac{1}{3}\overline{PB}$，$\overline{PG}=2\overline{GA}$．



（1）求证：D，E，F，G 四点共面；

（2）求四面体 D-EFC 的体积．

20．2020 年是脱贫攻坚的收官之年，国务院扶贫办确定的贫困县已全部脱贫摘帽，脱贫攻坚取得重大胜利，为我国全面建成小康社会，实现第一个百年目标打下了坚实基础．在扶贫政策的大力支持下，某县汽车配件厂经营得十分红火，不仅解决了就业也为脱贫作出了重大贡献．现该厂为了了解其主打产品的质量，从流水线上随机抽取 200 件该产品，统计其质量指数并绘制频率分布直方图（如图 1）：

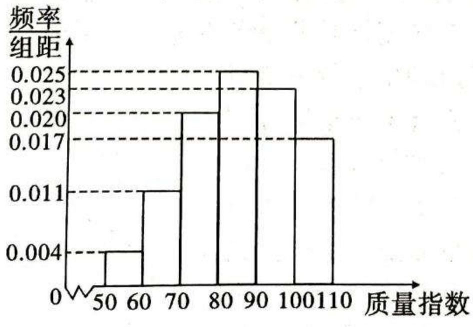


图1

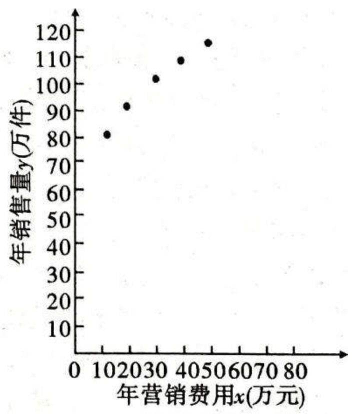


图2

根据经验，产品的质量指数在[50，70）的称为 A 类产品，在[70，90）的称为 B 类产品，在[90，110]的称为 C 类产品，A、B、C 三类产品的销售利润分别为每件 3、7、11（单位：元）．以这 200 件产品的质量指数位于各区间的频率代替产品的质量指数位于该区间的概率．

（1）求每件产品的平均销售利润；

（2）该厂为了解年营销费用 x（单位：万元）对年销售量 y（单位：万件）的影响，对近 5 年的年营销费用 x_i 和年销售量 y_i（i＝1，2，3，4，5）数据做了初步处理，得到的散点图（如图 2）及一些统计量的值．

$\sum_{i=1}^{5}u_i=16.30$，$\sum_{i=1}^{5}v_i=24.87$，$\sum_{i=1}^{5}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})=0.41$，$\sum_{i=1}^{5}(u_i-\overline{u})^2=1.64$，其中 $u_i=\ln x_i$，$v_i=\ln y_i$，$\overline{u}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}u_i$，$\overline{v}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}v_i$．

根据散点图判断，$y=a\cdot x^b$ 可以作为年销售量 y（万件）关于年营销费用 x（万元）的回归方程．

（ⅰ）建立 y 关于 x 的回归方程；

（ⅱ）若该厂规定企业最终收益为销售利润减去营销费用以及和营销费用等额的员工奖金，请你用（ⅰ）所求的回归方程估计该厂应投入多少营销费，才能使得该产品一年的最终收益达到最大？

参考公式和参考数据：对于一组数据（u_1，v_1），（u_2，v_2），…，（u_n，v_n），其回归直线 v＝α

$+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{\beta}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}$，$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$，$e^{4.159}=64$.

21．已知 $D(2\sqrt{3},-3)$ 为椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上一点，过点 D 作抛物线 C_2：$x^2=4\sqrt{3}y$ 的两条切线，切点分别为 A，B．

（1）求 AB 所在直线方程；

（2）若直线 AB 与椭圆 C_1 相交于 P，Q 两点，O 为坐标原点，设直线 PQ，DP，DQ 的斜率分别为 k，k_1，k_2，是否存在符合条件的椭圆使得 $k_1+k_2=8k$ 成立？若存在，求出椭圆方程；若不存在，请说明理由．

22．已知函数 f（x）＝x-lnx-a（a∈**R**）．

（1）讨论函数 f（x）的零点个数；

（2）当 a＞1 时，实数 x_0 为函数 f（x）的小于 1 的零点，求证：

①$\dfrac{1}{2}x_0+\dfrac{1}{x_0}+1<e^a$；

②$\dfrac{{x_0}^2+1}{x_0}>2a-\ln a$．

重庆南开中学高2021级高三第五次质量检测

数学答案

一、单项选择题：每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	D	A	D	A	A	C	B	D

7. 解析：$F(1,0)$，直线 $l: x=-y+1$ 代入 $y^2=4x$ 得 $y^2+4y-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-4$，$y_1y_2=-4$，$|AB|=\sqrt{1+(-1)^2}|y_1-y_2|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=8$，线段 AB 中点 $N(3,-2)$，于是 $|MN|=\sqrt{1+1^2}\cdot|x_N-x_M|=4\sqrt{2}$，从而 $r^2=|AM|^2=|MN|^2+\frac{|AB|^2}{4}=48$，故圆面积为 48π.

8. 解析：$a=\log_2 3+\log_6 4>\log_2 3+\log_9 4=\log_2 3+\log_3 2>2\sqrt{\log_2 3\cdot\log_3 2}=2$，令 $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$，则 $f(x)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，所以 $f(a)<0$，可得 $3^a+4^a<5^a$，于是 $5^b<5^a$，所以 $b<a$；又 $5^b=3^a+4^a>3^2+4^2=25$，得 $b>2$，所以 $2<b<a$.

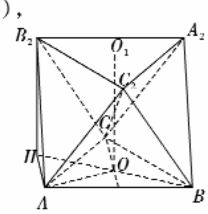
二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

题号	9	10	11	12
选项	BC	CD	ACD	ACD

11. 解析：对于A：设 $a,b\in S$，则 $a=2n_1$，$b=2n_2$，$n_1\in\mathbf{Z}$，$n_2\in\mathbf{Z}$，于是 $a+b=2(n_1+n_2)$，$a-b=2(n_1-n_2)$，$ab=2(2n_1n_2)$，且 $n_1+n_2\in\mathbf{Z}$，$n_1-n_2\in\mathbf{Z}$，$2n_1n_2\in\mathbf{Z}$，即有 $a+b$，$a-b$，$a\cdot b\in S$，故 S 是一个数环. 对于B：设 $a,b\in S$，则 $a=\sqrt{2}n_1$，$b=\sqrt{2}n_2$，$n_1\in\mathbf{Z}$，$n_2\in\mathbf{Z}$，则 $ab=\sqrt{2}(\sqrt{2}n_1n_2)$，显然 $\sqrt{2}n_1n_2\notin\mathbf{Z}$，故 S 不是一个数环. 对于C：对任意一个数环，取 $a=b$，则 $0=a-b$ 必在此数环中，故0一定在 $S\cap T$ 中，$S\cap T$ 都不是空集. 对于D：设 $a,b\in S\cap T$，因 S 是一个数环，故 $a+b$，$a-b$，$a\cdot b\in S$，而 T 是一个数环，故 $a+b$，$a-b$，$a\cdot b\in T$，所以 $a+b$，$a-b$，$a\cdot b\in S\cap T$，故 $S\cap T$ 是数环.

12. 解析：对于A：因旋转前后 A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2 共面，由棱柱性质知平面 $A_2B_2C_2$ // 平面 ABC，从而 A_2B_2 // 平面 ABC，A 正确；对于B：因棱柱体积 $V=S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2\times AA_1=2\sqrt{2}$，解得高 $AA_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

设 H 为 B_2 在平面 ABC 上的射影（如图），



则 H 在线段 BO 的延长线上且 $HO=OB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，又 $B_2H=OO_1=AA_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，而 $AH=AO=BO$，所以 $AB_2=\sqrt{B_2H^2+AH^2}=2$，故B错误；对于C：因 $A_2B_2/\!/A_1B_1/\!/AB$，且 $A_2B_2=A_1B_1=AB$，故四边形 ABA_2B_2 为平行四边形，由对称性知 $AA_2=BB_2$，又 $AB_2=AB=2$，所以四边形 ABA_2B_2 为正方形，C正确；对于D：因旋转前后 A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2 都在以 O_1 为圆心的同一个圆上，所以旋转前后的两个几何体的外接球不变，故D正确.

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\sqrt{5}$　　14. $-\frac{4}{3}$　　15. $\frac{25}{42}$　　16. $12,4n+4$

16. 解析：记 a_n 表示第 n 代"类勾股树"上的所有正方形的面积之和，则 $a_1=8$. 第2代"类勾股树"在第1代的最上面的每个正方形上各增加两个小正方形，由勾股定理知，增加的两个小正方形的面积之和恰好等于原来的正方形的面积，于是 $a_2-a_1=4$，以此类推，故 $\{a_n\}$ 是以8为首项，公差为4的等差数列，所以 $a_n=8+(n-1)\times4=4n+4$.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解：选①：结合正弦定理可得：$(a-b)(a+b)=c(c-b)$，$\therefore a^2=b^2+c^2-bc$，

又由余弦定理 $\therefore \cos A=\frac{1}{2}, A=\frac{\pi}{3}$　……3分

②$\because A+B+C=\pi$，$\therefore$ 由 $b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$ 得 $\sin B\sin\frac{\pi-A}{2}=\sin A\sin B$，且 $\sin B\neq0$，$\therefore \cos\frac{A}{2}=\sin A$

$\therefore \cos\frac{A}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)=0$，$\therefore \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，$\therefore A=\frac{\pi}{3}$　……3分

③由 $\cos 2A-\cos 2B=2\sin C(\sin B-\sin C)$ 得，

$1-2\sin^2A-(1-2\sin^2B)=2\sin C(\sin B-\sin C)$

$\therefore \sin^2B-\sin^2A=\sin B\sin C-\sin^2C$，$\therefore a^2=b^2+c^2-bc$，又由余弦定理：

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}, A=\frac{\pi}{3}$　……3分

注：如果选择多个条件分别作答，则按第一个解答计分.

(1) $\because A=\frac{\pi}{3}$ 且 $AB=AD$，$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，$\therefore \angle BDC=120°$，$BD=2$，$BC=3$，

在三角形 $\triangle BCD$ 中由正弦定理得：$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}$，

即 $\frac{3}{\sin120°}=\frac{2}{\sin\angle BCD}$，$\therefore \sin\angle ACB=\sin\angle BCD=\frac{\sqrt{3}}{3}$.　……6分

(2) 设 $DC=x$，$\therefore AD=AB=BD=2x$，$\therefore AC=3x$，在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得：

$\cos60°=\frac{(2x)^2+(3x)^2-9}{2\cdot2x\cdot3x}$，$\therefore x^2=\frac{9}{7}$，$AC=3x=\frac{9\sqrt{7}}{7}$　……10分

18. 解：(1) 由题意得：$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，$\therefore 4a_{n+1}^2=(a_n+a_{n+2})^2=a_n^2+a_{n+2}^2+2a_na_{n+2}\geqslant 4a_na_{n+2}$，所以 $a_{n+1}^2\geqslant a_na_{n+2}$ 成立；……4 分

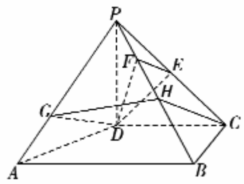
(2) 设公差为 d，$\therefore 2(a_1+2d)=a_1+3a_1+3d$，$\therefore d=2a_1$，

又 $a_2=3$，$\therefore a_1+d=2\Rightarrow a_1=1$，$d=2$，$\therefore a_n=2n-1$ ……8 分

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$ ……10 分，

$\therefore T_n=\dfrac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)<\frac{3}{8}$ ……12 分

19. 解：(1) 取 FB 中点 H，连接 CH，GH，



由题知 G，H 分别为 PA，PB 的三等分点，所以 $GH/\!/AB$，$GH=\frac{2}{3}AB$，……2 分

又 $AB/\!/CD$，$AB=3$，$CD=2$，$\therefore GH/\!/CD$，$GH=CD$，$\therefore CDGH$ 为平行四边形，

$\therefore DG/\!/CH$ ……4 分

另一方面，E，F 分别为 PH，PC 中点，$\therefore EF/\!/CH\Rightarrow DG/\!/EF$，$\therefore D$，$E$，$F$，$G$ 四点共面. ……6 分

(2) 由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$ 得 $PD\perp BC$，

又由题知 $BC\perp CD$，故 $BC\perp$ 平面 PCD，$\therefore BC\perp DE$，

另一方面，在三角形 PDC 中，$PD=DC=2$，E 为 PC 中点，

所以 $DE\perp PC$，从而 $DE\perp$ 平面 PBC. ……9 分

在梯形 $ABCD$ 中，易知 $BC=\sqrt{3}$，$PC=2\sqrt{2}$，

故 Rt$\triangle PBC$ 中，$S_{\triangle EFC}=\frac{1}{6}S_{\triangle PBC}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以四面体 $D-EFC$ 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle EFC}\cdot DE=\frac{\sqrt{3}}{9}$ ……12 分

20. 解：(1) 由题意知：产品为 A，B，C 类产品的频率（概率）分别为 0.15，0.45，0.4，记每件产品的销售利润为 ξ，则 ξ 的分布列为

ξ	3	7	11
P	0.15	0.45	0.4

所以每件产品的平均销售利润 $E\xi=3\times0.15+7\times0.45+11\times0.4=8$（元） ……4 分

(2)（ⅰ）由 $y=a\cdot x^b$ 得：$\ln y=b\ln x+\ln a$，令 $u=\ln x$，$v=\ln y$，$\alpha=\ln a$

则设 $v=bu+\alpha$，

$\therefore \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2}=\dfrac{0.41}{1.64}=0.25$，……6 分

$\therefore \hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{b}\bar{u}=\frac{24.87}{5}-0.25\times\frac{16.3}{5}=4.159.$

$\therefore \hat{v}=0.25u+4.159$，$\therefore \ln\hat{y}=0.25\ln x+4.159$，$\therefore \hat{y}=e^{4.159}x^{\frac{1}{4}}$，$\therefore \hat{y}=64x^{\frac{1}{4}}$ ……8 分

(ⅱ)设年收益 z 万元，则 $z=(E\xi)y-2x=8\times64x^{\frac{1}{4}}-2x$， ……10 分

令 $x^{\frac{1}{4}}=t$，$\therefore z=f(t)=8\times64t-2t^4$，$\therefore f'(t)=8\times64-8t^3$，$\therefore$ 令 $f'(t)=0$ 得 $t=4$，

当 $t\subset(0,4)$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增，

当 $t\subset(4,+\infty)$ 时，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单调递减，所以 $z_{max}=f(t)_{max}=f(4)=768$，此时 $x=256$，

即当投入 256 万元营销费，能使得该产品一年的最终收益达到最大，最大值为 768 万元. ……12 分

21. 解：(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $y=\frac{1}{4\sqrt{3}}x^2$ $\therefore y'=\frac{1}{2\sqrt{3}}x$，

故抛物线在点 A 处切线方程为：$y=\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1(x-x_1)+\frac{x_1^{\ 2}}{4\sqrt{3}}$，$\therefore 4\sqrt{3}y=2x_1x-x_1^{\ 2}$，

即 $4\sqrt{3}y=2x_1x-4\sqrt{3}y_1$ ①

同理可得抛物线在点 B 处的切线方程为 $4\sqrt{3}y=2x_2x-4\sqrt{3}y_2$ ②， ……3 分

将点 $D(2\sqrt{3},-3)$ 代入①②得：$x_1-y_1+3=0$，$x_2-y_2+3=0$

所以直线 AB 所在的直线方程为 $x-y+3=0$ ……5 分

(2)设 $P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$，将直线 $x-y+3=0$ 与椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 联立得：

$(b^2+a^2)x^2+6a^2x+9a^2-a^2b^2=0(*)$. $\therefore x_3+x_4=\frac{-6a^2}{b^2+a^2}$，$x_3x_4=\frac{9a^2-a^2b^2}{b^2+a^2}$ ……7 分

$k_1+k_2=\frac{y_3}{x_3}+\frac{y_4}{x_4}=\frac{y_3x_4+y_4x_3}{x_3x_4}=8k_{PQ}=8k_{AB}=8$，

$\therefore (x_3+3)x_4+(x_4+3)x_3=8x_3x_4$，$\therefore x_3+x_4=2x_3x_4$， ……10 分，

代入韦达定理化简得：$b^2=12$，

又点 $D(2\sqrt{3},-3)$ 在椭圆 C_1 上有：$\frac{12}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$，$\therefore a^2=48$，此时$(*)$式 $\Delta>0$ 符合题意，故所求椭圆方程为

$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1.$ ……12 分

22. 解：(1)$f'(x)=1-\frac{1}{x}(x>0)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，

且当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$\therefore f(x)_{min}=f(1)=1-a$ ……2 分

当 $a<1$ 时，$f(x)>0$，函数 $f(x)$ 没有零点；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点 $x=1$；

当 $a>1$ 时，$f(1)<0$，且 $x\to0^+$ 时，$f(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，

故函数有两个零点. ……4 分

(2)由(1)知当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有两个零点，设 x_0 为较小的零点，即 $0<x_0<1$，

且 $a=x_0-\ln x_0=\ln e^{x_0}+\ln\frac{1}{x_0}=\ln\left(\frac{1}{x_0}e^{x_0}\right)$，$\therefore e^a=\frac{1}{x_0}e^{x_0}$，　……5 分

①要证 $\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{x_0}+1<e^a$，即证 $\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{x_0}+1<\frac{1}{x_0}e^{x_0}$，即证 $e^{x_0}>\frac{1}{2}{x_0}^2+x_0+1(x_0\in(0,1))$　……6 分

令 $\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1(0<x<1)$，$\therefore \varphi'(x)=e^x-x-1$，$\varphi''(x)=e^x-1$

$\therefore \varphi''(x)>0$，$\therefore \varphi'(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，所以 $\varphi'(x)>\varphi'(0)=0$，$\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，

$\therefore \varphi(x)>\varphi(0)=0(0<x<1)$，所以 $e^{x_0}>\frac{1}{2}{x_0}^2+x_0+1$ 成立；　……8 分

②解法 1：注意到 $a>1$，$\therefore \ln a>0$，$\therefore 2a-\ln a<2a$，故要证 $\frac{{x_0}^2+1}{x_0}>2a-\ln a$，即可证 $\frac{{x_0}^2+1}{x_0}>2a$，即证 $x_0+\frac{1}{x_0}>2(x_0-\ln x_0)$，也即证 $2\ln x_0+\frac{1}{x_0}-x_0>0(0<x_0<1)$，　……10 分

令 $h(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，$\therefore h'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1=\frac{2x-1-x^2}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}<0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$\therefore$ $h(x)>h(1)=0$，$\therefore 2\ln x_0+\frac{1}{x_0}-x_0>0(0<x_0<1)$ 成立，从而原不等式得证.　……12 分

②解法 2：要证 $\frac{{x_0}^2+1}{x_0}>2a-\ln a$，即证 $x_0+\frac{1}{x_0}-2(x_0-\ln x_0)+\ln(x_0-\ln x_0)>0$

即证 $\frac{1}{x_0}-x_0+2\ln x_0+\ln(x_0+\ln\frac{1}{x_0})>0$，

也即证 $\left(\frac{1}{x_0}-\ln\frac{1}{x_0}\right)-\left[\left(x_0+\ln\frac{1}{x_0}\right)-\ln\left(x_0+\ln\frac{1}{x_0}\right)\right]>0$，令 $t=\frac{1}{x_0}$，则 $t>1$，

故只需证 $t-\ln t>\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)-\ln\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)$ 成立，即需 $f(t)>f\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)$ 成立即可，　……10 分

注意到 $\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)'=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{t-1}{t^2}>0$，$\therefore \frac{1}{t}+\ln t>1$.

由于 $f(x)$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 单调递增，故只需 $t>\frac{1}{t}+\ln t(t>1)$ 成立即可，

令 $m(t)=t-\frac{1}{t}-\ln t$，$\therefore m'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{t^2-t+1}{t^2}$，显然 $m'(t)>0$ 恒成立，

$\therefore m(t)>m(1)=0$，$\therefore t>\frac{1}{t}+\ln t(t>1)$ 成立，从而原不等式得证.　……12 分