

重庆八中 2021-2022 学年度高三（上）入学摸底测试

数学试题参考答案

命题：张新、王虎军 审题：张新 打印：王虎军 校对：张新

一、选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	D	A	B	A	C	A	B	AC	ABD	BCD	AD

1. B 【详解】由题意， $A = \{1, 3, 3^2, \dots\}$ ，故 $A \cap B = \{1, 3, 9\}$ ，故选 B.
2. D 【详解】 $f(8) = 1 - \log_2 8 = -2$ ， $\therefore f(f(8)) = f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = 1 - \log_2 1 = 1$
3. A 【详解】函数 $F(x) = f(x+2) + \sqrt{3-x}$ 需满足 $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $-2 < x \leq 3$.
4. B 【详解】令 $y' = 3x^2 + 6 = 9$ ，解得 $x = \pm 1$ ，故切点为 $(1, 10)$ 或 $(-1, -4)$ ，而 $b = y - 9x$ ，所以 $b = 10 - 9 = 1$ 或 $b = -4 - 9 = -13$ ，故选 B
5. A 【详解】 $a = 6^{0.6} > 6^0 = 1$ ， $0 < b = 0.6^6 < 0.6^0 = 1$ ， $c = \log_6 0.6 < \log_6 1 = 0$ ，所以 $a > b > c$ ，选 A.
6. C 【详解】设 $g(x) = x^2 \cdot f(x)$ ， $g'(x) = x^2 \cdot f'(x) + 2x \cdot f(x)$ ，由条件可知当 $x > 0$ 时， $g'(x) > 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增；因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $g(x)$ 也是奇函数，且在 $(-\infty, 0)$ 单增，因为 $f(2) = 0$ ，所以 $g(-2) = g(2) = 0$ ，所以函数 $g(x) \geq 0$ 的解集是 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ ，而 $x^2 f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ ， $f(x)$ 是 R 上的奇函数， $f(0) = 0$ ，所以 $f(x) > 0$ 的解集是 $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.
7. A 【详解】分离参数得： $a \leq \frac{e^x + 2x^2 + 2}{x} = \frac{e^x}{x} + 2x + \frac{2}{x}$ 对于任意 $x > 0$ 恒成立，令 $g(x) = \frac{e^x}{x} + 2x + \frac{2}{x} (x > 0)$ ，则 $a \leq g(x)_{\min}$ ，则 $g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} + 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 2x^2 - 2}{x^2} = \frac{(x-1)(e^x + 2x + 2)}{x^2}$ ；当 $0 < x < 1$ 时， $g'(x) < 0$ ；当 $x > 1$ 时， $g'(x) > 0$ ，所以 $g(x) = \frac{e^x}{x} + 2x + \frac{2}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)_{\min} = g(1) = e + 2 + 2 = e + 4$ ，所以实数 a 的最大值是 $e + 4$ ，故选 A.
8. B 【详解】因为 $\lambda > 0$ ，不等式 $e^{3\lambda x} - \frac{\ln x}{3\lambda} \geq 0$ 成立，即 $3\lambda e^{3\lambda x} \geq \ln x$ ，转化为 $3\lambda x e^{3\lambda x} \geq x \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x$ 恒成立，构造函数 $g(x) = x e^x (x > 0)$ ，可得 $g'(x) = e^x + x e^x = (x+1)e^x$ ，当 $x > 0$ ， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单增，则不等式 $e^{3\lambda x} - \frac{\ln x}{3\lambda} \geq 0$ 恒成立等价于 $g(3\lambda x) \geq g(\ln x)$ 恒成立，即 $3\lambda x \geq \ln x$ 恒成立，进而转化为 $3\lambda \geq \frac{\ln x}{x}$ 恒成立；设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，可得 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，当 $0 < x < e$ 时， $h'(x) > 0$ ， $h(x)$ 单调递增；当 $x > e$ 时， $h'(x) < 0$ ， $h(x)$ 单调递减，所以当 $x = e$ ，函数 $h(x)$ 取得最大值 $h(e) = \frac{1}{e}$ ，所以 $3\lambda \geq \frac{1}{e}$ ，即实数 λ 的取值范围是 $[\frac{1}{3e}, +\infty)$ ，故选 B.
9. AC 【详解】 $f(x) = x$ 和 $g(t) = \sqrt[3]{t^3} = t$ 定义域都为 R ，对应关系相同，两个函数是同一个函数，A 正确；对于 B，全称命题 “ $\forall x < 0, 2^x < 1$ ” 的否定为 “ $\exists x_0 < 0, 2^{x_0} \geq 1$ ”，故 B 错误；对于 C， $\log_2 27 \cdot \log_3 25 \cdot \log_5 8 = 18 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2 = 18 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 2 = 18$ ，故 C 正确；对于 D，由 $|x-1| < 1$ ，得 $0 < x < 2$ ，因为当 $0 < x < 2$ 时， $x > 0$ 一定成立，而 $x > 0$ 时，不一定有 $0 < x < 2$ ，所以 “ $x > 0$ ” 是 “ $|x-1| < 1$ ” 的必要不充分条件，所以 D 错误.
10. ABD 【详解】因双曲正弦函数 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 是奇函数，双曲余弦函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是

偶函数, 因此 $y = \sinh x \cdot \cosh x$ 是奇函数, A 错误; $(\cosh(x))' = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$, B 错误;

双曲余弦函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 递增, $\cosh(-1) = \cosh(1) < \cosh(2)$, C 正确;

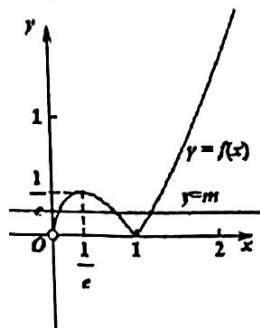
对于 D, $[\sinh(x)]^2 - [\cosh(x)]^2 = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x + e^{-x}}{2})^2 = -1$, D 错误. 因此, 说法错误的是 ABD.

11. BCD 【详解】 $f'(x) = \ln x + 1$, 由 $f'(x) > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$, 即函数 $f(x)$ 在

$(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增; 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$,

$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$, $f(1) = 0$, 则函数 $y = |f(x)|$ 与 $y = m$ 的图象如下图所示,

平移直线 $y = m$ 可知, 函数 $y = |f(x)|$ 与 $y = m$ 的交点个数可能为 0, 1, 2, 3, 则关于 x 的方程 $|f(x)| = m$ 的实数根的个数可能为 0, 1, 2, 3, 故选 BCD.



12. AD 【详解】 由已知 $f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - (x^2+2x-7)e^x}{e^{2x}} = \frac{9-x^2}{e^x}$,

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 3$, 当 $x < -3$ 或 $x > 3$ 时, $f'(x) < 0$, $-3 < x < 3$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 和 $(3, +\infty)$ 上递减, 在 $(-3, 3)$ 上递增, $f(x)$ 极小值 $= f(-3) = -4e^3$, $f(x)$ 极大值 $= f(3) = \frac{8}{e^3}$, A 正确; 切线

斜率 $k_1 = f'(0) = 9$, 直线 $9y - x + 1 = 0$ 斜率 $k_2 = \frac{1}{9}$, $k_1 k_2 \neq -1$, 两直线不垂直, B 错误; $x \rightarrow -\infty$ 时,

$f(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 若 $f(x) = k$ 有三个实根, 则 $k \in (0, \frac{8}{e^3})$; 当 $-4e^2 < k \leq 0$ 时, $f(x) = k$

只有两个根, C 错误; 若 $x \in [0, t]$ 时, $f_{\max}(x) = \frac{8}{e^3}$, 则 $t \geq 3$, t 的最小值为 3, D 正确. 故选 AD.

三、填空题

13. $(-1, \frac{5}{2}]$ 【详解】 由 $-x^2 + 5x + 6 > 0$ 得 $-1 < x < 6$. 设 $u(x) = -x^2 + 5x + 6 = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{49}{4}$ ($-1 < x < 6$),

则 $u(x)$ 在区间 $(-1, \frac{5}{2}]$ 上单调递增, 在区间 $(\frac{5}{2}, 6)$ 上单调递减. 又 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以

函数 $y = \log_3(-x^2 + 5x + 6)$ 的单调递增区间是 $(-1, \frac{5}{2}]$. 故答案为 $(-1, \frac{5}{2}]$, 写成 $(-1, \frac{5}{2})$ 亦可.

14. $[0, \frac{3}{4}]$ 【详解】 $\because f(x) = ax^3 + 2ax^2 + x - 3 \therefore f'(x) = 3ax^2 + 4ax + 1$ 若 $a = 0$, 则 $f'(x) = 1 > 0$ 恒成立,

$f(x)$ 在 R 上为增函数, 满足条件; 若 $a \neq 0$, 则 $\Delta = 16a^2 - 12a \leq 0$ 时, 即 $0 < a \leq \frac{3}{4}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立,

$f(x)$ 在 R 上为增函数, 满足条件; 综上可得 $0 \leq a \leq \frac{3}{4}$, 即 $a \in [0, \frac{3}{4}]$.

15. $(-1, 3)$ 【详解】 由 $f(x+3)$ 是偶函数知 $f(x)$ 关于 $x=3$ 对称; 由 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递减知: $f(x)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增. 由 $f(2x+3) < f(x+6)$ 知: $|2x+3-3| < |x+6-3|$, 即 $4x^2 < (x+3)^2$, 解得 $-1 < x < 3$, 故解集为 $(-1, 3)$.

16. $[-\infty, \frac{e}{2}]$ 【详解】 由题意知, 函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{2k(1-x)}{x} = \frac{(e^x - 2kx)(x-1)}{x^2}$,

因为函数 $f(x)$ 有唯一极值点, 所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点, 所以 $e^x - 2kx = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 无变

号零点, 令 $g(x) = e^x - 2kx$, 则 $g'(x) = e^x - 2k$,

当 $k \leq 0$ 时, $g'(x) = e^x - 2k > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 且 $g(0) = 1$, 所以 $g(x) = 0$ 在

$(0, +\infty)$ 上无解, 符合要求; 当 $k > 0$ 时, $g'(x) = e^x - 2k = 0$ 有解, 且 $x = \ln(2k)$, 又因为 $0 < x < \ln(2k)$ 时,

$g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \ln(2k))$ 上单调递减; $x > \ln(2k)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\ln(2k), +\infty)$ 上

单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = e^{\ln(2k)} - 2k \ln(2k) = 2k - 2k \ln(2k) > 0$, 解得 $0 < k < \frac{e}{2}$, 当 $k = \frac{e}{2}$ 时, 作出函数 $y = e^x$ 和 $y = ex$ 的图象可知它们相切于点 $(1, e)$, 所以符合条件, 综上所述: $k \leq \frac{e}{2}$, 故答案为 $\left(-\infty, \frac{e}{2}\right]$.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 由正弦定理得: $\sqrt{3} \cos A (\sin C \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos C) = \sin A \cdot \sin A$
所以 $\sqrt{3} \cos A \cdot \sin(B+C) = \sin A \cdot \sin A$, 所以 $\sqrt{3} \cos A \cdot \sin A = \sin A \cdot \sin A$

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A > 0$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$5 分

(2) 由余弦定理得: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 又因为 $A = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$

所以 $1 = b^2 + c^2 - bc \Rightarrow (b+c)^2 = 1 + 3bc$, 又因为 $b+c = \sqrt{7}$

所以 $bc = 2$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$10 分

18. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 1$, 解得 $a_1 = 1$

当 $n \geq 2$ 时, $\begin{cases} S_n = 2a_n - 1 \\ S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = 2a_n - 2a_{n-1} \Rightarrow a_n = 2a_{n-1}$

所以 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首相, 公比 $q=2$ 的等比数列, 所以 $a_n = 2^{n-1}$ 6 分

(2) $b_n = \frac{2n-1}{a_n} = \frac{2n-1}{2^{n-1}}$, $\therefore T_n = 1 + \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$

$\therefore \frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}$

$\therefore \frac{1}{2} T_n = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \dots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ $\therefore T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$ 12 分

19. 解: (1)

	成绩优秀	成绩一般	总计
男生	5	35	40
女生	20	40	60
总计	25	75	100

因为 $K^2 = \frac{100(5 \times 40 - 20 \times 35)^2}{25 \times 75 \times 40 \times 60} = \frac{50}{9} \approx 5.556 < 6.635$.

所以没有 99% 的把握认为在本次测试中“学生是否选择几何题和代数题与性别有关”6 分

(2) 随机变量 ξ 的所有可能值为 0, 1, 2, 3, 则有:

$P(\xi=0) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{80}$, $P(\xi=1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{13}{44} \times \frac{1}{8}$

$P(\xi=2) = \frac{4}{5} \times \frac{13}{44} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{80}$, $P(\xi=3) = \frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{20}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{33}{80}$	$\frac{9}{20}$

所以 $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{80} + 1 \times \frac{10}{80} + 2 \times \frac{33}{80} + 3 \times \frac{36}{80} = \frac{23}{10}$ 12 分

20. 解: (1) 依题意可得: $PD \perp DA$, $DP = DA = DC = 2$.

$\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = DA$, $AB \perp DA$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD , $\therefore AB \perp DE$.

在 $Rt\triangle PAD$ 中, $DP = DA$, E 是棱 PA 的中点, 所以 $PA \perp DE$.

又 $PA \cap AB = A$, $PA, AB \subset$ 平面 PAD , $\therefore DE \perp$ 平面 PAB .

又 $DE \subset$ 平面 DEM , $\therefore$ 平面 $DEM \perp$ 平面 PAB .

.....6 分

(2) 如图, 取 CD 的中点 N , 连接 MN , NF ,

则 $NF \parallel PD$, $NF = \frac{1}{2}PD = 1$

由 (1) 知 $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore NF \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore \angle FMN$ 是直线 MF 与平面 $ABCD$ 所成角

$$\therefore \tan \angle FMN = \frac{1}{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore MN = \sqrt{2}, \therefore MC = \sqrt{MN^2 - NC^2} = 1$$

$\therefore M$ 是棱 BC 的中点 (或向量法由线面角解出点 M 坐标)

以 D 为坐标原点, DA, DC, DP 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系,

则有: $D(0,0,0), E(1,0,1), F(0,1,1), M(1,2,0)$

$$\therefore \overrightarrow{DE} = (1,0,1), \overrightarrow{DF} = (0,1,1), \overrightarrow{DM} = (1,2,0)$$

设平面 EDM 的法向量为 $\vec{m} = (a,b,c)$, 平面 DMF 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$

$$\text{则} \begin{cases} 0 = \overrightarrow{DE} \cdot \vec{m} = a + c \\ 0 = \overrightarrow{DM} \cdot \vec{m} = a + 2b \end{cases}, \text{令 } a = -2, \text{ 则 } \vec{m} = (-2, 1, 2)$$

$$\text{有} \begin{cases} 0 = \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = y + z \\ 0 = \overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = x + 2y \end{cases}, \text{令 } x = -2, \text{ 则 } \vec{n} = (-2, 1, -1)$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{3 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore \text{锐二面角 } E-DM-F \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

.....12 分

$$21. \text{ 解: (1) 依题意得 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} = e = \frac{c}{a} \\ \sqrt{5} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 3 \end{cases}, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程: } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{.....5 分}$$

(2) 因为 P 是椭圆 C 上异于椭圆 C 端点的任意一点, 且 $l \parallel OP$, 故直线 l 的斜率存在.

设过点 $Q(0, -2)$ 的直线 $l: y = kx - 2$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

$$\text{由} \begin{cases} y = kx - 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并整理, 得 } (1 + 4k^2)x^2 - 16kx + 12 = 0.$$

$$\Delta = (-16k)^2 - 4 \times 12 \times (1 + 4k^2) > 0 \Rightarrow 4k^2 > 3$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{16k}{1 + 4k^2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{12}{1 + 4k^2}$$

.....7 分

$$\Rightarrow |QA| \cdot |QB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_Q| \cdot \sqrt{1+k^2} |x_2 - x_Q| = (1+k^2) |x_1 \cdot x_2| \quad (\text{注: } x_Q=0) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} l_{OP}: y=kx \\ x^2+4y^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow (1+4k^2)x^2=4 \Rightarrow x_P^2=\frac{4}{1+4k^2}$$

$$\Rightarrow |OP|^2 = (\sqrt{1+k^2} |x_P - x_O|)^2 = (1+k^2)(x_P)^2 = (1+k^2) \frac{4}{1+4k^2} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } \overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}^2 \Rightarrow |QA| \cdot |QB| = \lambda |OP|^2 \Rightarrow |x_1 \cdot x_2| = \lambda x_P^2 \quad (\text{此处可以用向量翻译得到})$$

$$\Rightarrow \left| \frac{12}{1+4k^2} \right| = \lambda \frac{4}{1+4k^2} \Rightarrow \lambda = 3.$$

综上, 存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}^2$ 成立, 且 $\lambda=3$12 分

22. 解: (1) $f(x) = x^2 - 2ax + 2\ln x (a > 0)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2x - 2a + \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{x^2 - ax + 1}{x} \quad (a > 0, x > 0).$$

对于方程 $y = x^2 - ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4 (a > 0)$ 分类讨论

(i) 若 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$, 即 $0 < a \leq 2$ 时, 则 $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(ii) 若 $\Delta = a^2 - 4 > 0$, 即 $a > 2$ 时,

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right) \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

所以: 当 $0 < a \leq 2$ 时, $f(x)$ 单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 单调递增区间为 $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$;

单调递减区间为 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$5 分

(2) 由 (1) 知: $a > 2$ 且 $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = 1$. ($x_1 < x_2$)

$$\text{又 } g'(x) = \frac{1}{x} - b - 2cx \quad (x > 0), \therefore g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2}{x_1 + x_2} - b - c(x_1 + x_2),$$

$$\text{由 } g(x_1) = g(x_2) = 0 \text{ 得: } \begin{cases} \ln x_1 - bx_1 - cx_1^2 = 0 \\ \ln x_2 - bx_2 - cx_2^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{两式相减, 得 } \ln \frac{x_1}{x_2} = b(x_1 - x_2) + c(x_1^2 - x_2^2). \quad (x_1 < x_2)$$

$$\therefore y = (x_1 - x_2) g'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - b(x_1 - x_2) - c(x_1^2 - x_2^2) = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} - \ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} - \ln \frac{x_1}{x_2}.$$

$$\text{令 } \frac{x_1}{x_2} = t \in (0, 1), \therefore y = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t, \therefore y' = \frac{-(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0,$$

所以 $y = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

由 y 的取值范围是 $[\ln 3 - 1, +\infty)$, 得 t 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$,

$$\therefore a^2 = (x_1 + x_2)^2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 2 = t + \frac{1}{t} + 2 \in \left[\frac{16}{3}, +\infty\right),$$

又 $\because a > 2$, 故实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

.....12 分

公众号：潍坊高中数学