

重庆八中 2021-2022 学年度高三（上）入学摸底测试

数学试题

命题：张新、王虎军 审题：张新 打印：王虎军 校对：张新

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{y | y = 3^x, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x | x < 10\}$, 则 $A \cap B =$ ().
A. $\{3, 9\}$ B. $\{1, 3, 9\}$ C. $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$ D. $\{x | 0 < x < 10\}$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x+1), & x \leq 0 \\ 1 - \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(f(8)) =$ ().
A. -2 B. -1 C. 0 D. 1
- 已知函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 则函数 $F(x) = f(x+2) + \sqrt{3-x}$ 定义域为 ().
A. $(-2, 3]$ B. $[-2, 3]$ C. $(0, 3]$ D. $(0, 3)$
- 直线 $y = 9x + b$ 是曲线 $y = x^3 + 6x + 3$ 的一条切线, 则实数 $b =$ ().
A. -4 或 3 B. 1 或 5 C. -4 D. 5
- 设 $a = 6^{0.6}$, $b = 0.6^6$, $c = \log_6 0.6$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().
A. $a > b > c$ B. $a > c > b$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
- 已知定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(2) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $2xf(x) + x^2 f'(x) > 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ().
A. $(-\infty, -2)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
若对任意的正实数 x , 不等式 $xa \leq e^x + 2x^2 + 2$ 恒成立, 则实数 a 的最大值是 ().
A. $e+4$ B. $e+3$ C. $e+2$ D. $e+1$
- 设实数 $\lambda > 0$, 若对任意的 $x \in (1, +\infty)$, 不等式 $e^{3\lambda x} - \frac{\ln x}{3\lambda} \geq 0$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围是 ().
A. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{3e}, +\infty\right)$ C. $[e, +\infty)$ D. $[3e, +\infty)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

- 下列命题中，正确的命题有 ().
A. 函数 $f(x) = x$ 与 $g(t) = \sqrt[3]{t^3}$ 是同一个函数
B. 命题“ $\forall x < 0, 2^x < 1$ ”的否定为“ $\exists x_0 \geq 0, 2^{x_0} \geq 1$ ”
C. $\log_2 27 \cdot \log_3 25 \cdot \log_5 4 = 12$
D. 已知 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $x > 0$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的充分不必要条件

10. 悬链线是平面曲线，是柔性链条或缆索两端固定在两根支柱顶部，中间自然下垂所形成的外形，在工程中（如悬索桥、双曲拱桥、架空电缆）有广泛的应用。当微积分尚未出现时，伽利略猜测这种形状是抛物线，直到 1691 年莱布尼兹和伯努利利用微积分推导出悬链线的方程 $y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$



其中 c 为参数。当 $c=1$ 时，我们可构造出双曲函数：双曲正弦函数 $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 。关于双曲函数，下列结论正确的是()。

- A. $y = \sinh x \cdot \cosh x$ 是偶函数
B. $(\cosh(x))' = -\sinh(x)$
C. $\cosh(-1) < \cosh(2)$
D. $[\sinh(x)]^2 - [\cosh(x)]^2 = 1$
11. 设函数 $f(x) = x \cdot \ln x$ ，则关于 x 的方程 $|f(x)| = m$ 的实数根的个数可能为()。
A. 4
B. 3
C. 2
D. 1
12. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 7}{e^x}$ ，则下列结论正确的是()。
A. 函数 $f(x)$ 有极小值
B. 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与直线 $9y - x + 1 = 0$ 垂直
C. 若 $f(x) = k$ 有三个实根，则 k 的取值范围为 $(-4e^2, \frac{8}{e^3})$
D. 若 $x \in [0, t]$ 时， $f_{\max}(x) = \frac{8}{e^3}$ ，则 t 的最小值为 3

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填写在答题卡相应位置上。

13. 函数 $y = \log_3(-x^2 + 5x + 6)$ 的单调递增区间是_____。
14. 若函数 $f(x) = ax^3 + 2ax^2 + x - 3$ 不存在极值点，则 a 的取值范围是_____。
15. 若函数 $f(x+3)$ 是偶函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3]$ 上单调递减，则满足 $f(2x+3) < f(x+6)$ 的 x 的解集是_____。
16. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x} + 2k(\ln x - x)$ ，若函数 $f(x)$ 有唯一极值点，则实数 k 的取值范围是_____。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $\sqrt{3} \cos A(c \cdot \cos B + b \cdot \cos C) = a \cdot \sin A$ 。
- (1) 求角 A ；
- (2) 若 $a=1$ ， $b+c=\sqrt{7}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $S_n = 2a_n - 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $b_n = \frac{2n-1}{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

某中学校为了判断学生对几何题和代数题的感兴趣程度是否与性别有关, 在校内组织了一次几何题与代数题选答测试, 现从所有参赛学生中随机抽取 100 人, 对这 100 名学生选答几何题与代数题的情况进行了统计, 其中男同学 40 人, 女同学 60 人, 所得统计数据 (单位: 人) 如下表所示:

	代数题	几何题	总计
男生	5		
女生		40	
总计			

(1) 请将题中表格补充完整, 并判断能否有 99% 的把握认为 “学生是否选择几何题和代数题与性别有关”;

(2) 该中学校多次组织学生作答几何题与代数题, 据以往经验, 参赛学生做对代数题的概率为 $\frac{4}{5}$, 做对几何题的概率为 $\frac{3}{4}$, 且做对代数题与几何题相互独立. 该学校再次组织

了一次测试活动, 测试只有三道试题, 一道代数题, 两道几何题, 规定参赛学生必须三道试题都要作答. 用 ξ 表示某参赛学生在这次测试中做对试题的个数, 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$;

临界值表供参考:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

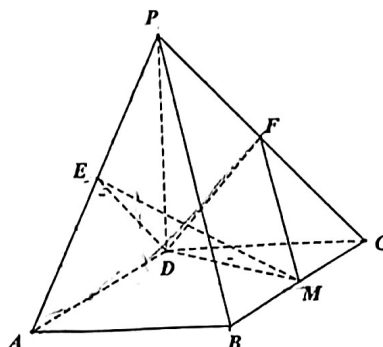
20. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 是斜边 PA 的长为 $2\sqrt{2}$ 的等腰直角三角形, E, F 分别是棱 PA, PC 的中点, M 是棱 BC 上一点.

(1) 求证: 平面 $DEM \perp$ 平面 PAB ;

(2) 若直线 MF 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

求锐二面角 $E-DM-F$ 的余弦值.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 长轴端点和短轴端点的距离为 $\sqrt{5}$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 P 为椭圆 C 上异于椭圆 C 端点的任意一点, 过点 $Q(0, -2)$ 且平行于 OP 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A, B 两点 (点 O 为坐标原点), 是否存在实数 λ , 使得 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}^2$ 成立? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2\ln x (a > 0)$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $g(x) = \ln x - bx - cx^2$, 若函数 $f(x)$ 的两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 恰为函数 $g(x)$ 的两个零点, 且 $y = (x_1 - x_2)g'(\frac{x_1 + x_2}{2})$ 的取值范围是 $[\ln 3 - 1, +\infty)$, 求实数 a 的取值范围.