

高三数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 7\}$, $B = \{x | x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$, $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$

- A. $(5, 7)$ B. $(1, 5)$ C. $(-1, 1)$ D. $(-1, 1) \cup (5, 7)$

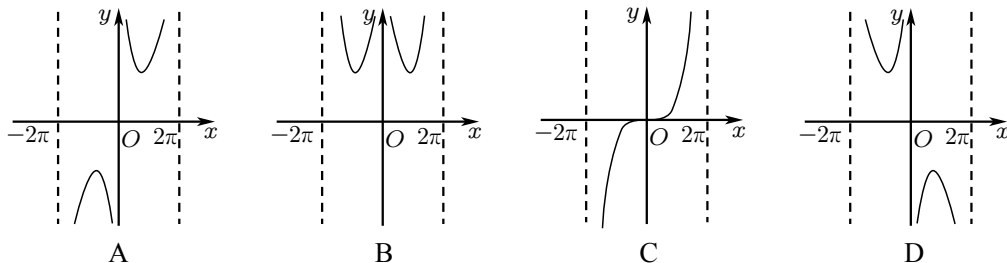
2. 已知复数 $\frac{2+ai}{i} = 4-bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a+b =$

- A. 2 B. -2 C. 4 D. 6

3. 已知 $2\sin(\pi - \alpha) = 3\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, 则 $\sin^2 \alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \cos^2 \alpha =$

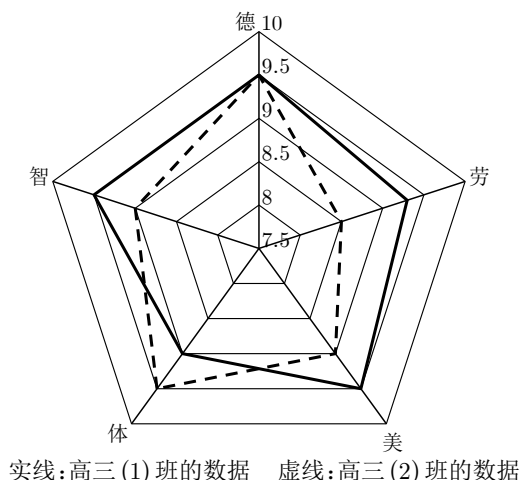
- A. $\frac{5}{13}$ B. $-\frac{1}{13}$ C. $-\frac{5}{13}$ D. $\frac{1}{13}$

4. 函数 $f(x) = \frac{x}{\cos x - 1}$ 的部分图象大致是



5. 构建德智体美劳全面培养的教育体系是我国教育一直以来的方向。某中学积极响应党的号召,开展各项有益于德智体美劳全面发展的活动。如图所示的是该校高三(1)、(2)班两个班级在某次活动中的德智体美劳的评价得分对照图(得分越高,说明该项教育越好)。下列说法正确的是

- A. 高三(2)班五项评价得分的极差为 1.5
B. 除体育外,高三(1)班的各项评价得分均高于高三(2)班对应的得分
C. 高三(1)班五项评价得分的平均数比高三(2)班五项评价得分的平均数要高
D. 各项评价得分中,这两班的体育得分相差最大



6. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , P 为 C 在第一象限上一点, 若 PF 的中点到 y 轴的距离为 3, 则直线 PF 的斜率为

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

7. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ 的两个焦点, O 为坐标原点, 点 P 在 C 的左支上, 且 $\frac{\overrightarrow{OF_1} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} + \frac{\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = 2\sqrt{3}$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为

- A. 8 B. $8\sqrt{3}$ C. 4 D. $4\sqrt{3}$

8. 中国古典乐器一般按“八音”分类, 这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法, 最早见于《周礼·春官·大师》. 八音分为“金、石、土、革、丝、木、匏、竹”, 其中“金、石、木、革”为打击乐器, “土、匏、竹”为吹奏乐器, “丝”为弹拨乐器. 某同学安排了包括“土、匏、竹”在内的六种乐器的学习, 每种乐器安排一节, 连排六节, 并要求“土”与“匏”相邻排课, 但均不与“竹”相邻排课, 且“丝”不能排在第一节, 则不同的排课方式的种数为

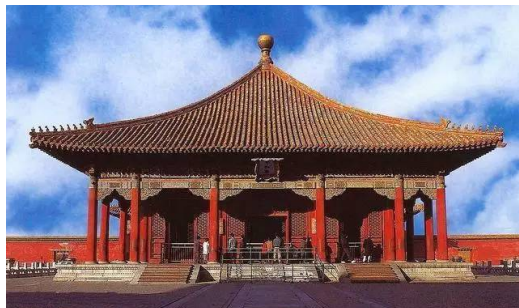
- A. 960 B. 1024 C. 1296 D. 2021

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 2\sin^2 x + 1$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 对于函数 $g(x)$, 下列说法正确的是

- A. $g(x)$ 的最小正周期为 π B. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{24}$ 对称
C. $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增 D. $g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{13\pi}{24}, 0)$ 对称

10. 攒尖是我国古代建筑中屋顶的一种结构形式, 宋代称为撮尖, 清代称攒尖, 通常有圆形攒尖、三角攒尖、四角攒尖、八角攒尖, 也有单檐和重檐之分, 多见于亭阁式建筑, 园林建筑. 下面以四角攒尖为例, 如图, 它的屋顶部分的轮廓可近似看作一个正四棱锥. 已知此正四棱锥的侧面与底面所成的锐二面角为 θ , 这个角接近 30° , 若取 $\theta = 30^\circ$, 侧棱长为 $\sqrt{21}$ 米, 则



- A. 正四棱锥的底面边长为 6 米 B. 正四棱锥的底面边长为 3 米
C. 正四棱锥的侧面积为 $24\sqrt{3}$ 平方米 D. 正四棱锥的侧面积为 $12\sqrt{3}$ 平方米

11. 新学期到来, 某大学开出了新课“烹饪选修课”, 面向 2020 级本科生开放. 该校学生小华选完内容后, 其他三位同学根据小华的兴趣爱好对他选择的内容进行猜测. 甲说: 小华选的不是川菜干烧大虾, 选的是烹制中式面食. 乙说: 小华选的不是烹制中式面食, 选的是烹制西式点心. 丙说: 小华选的不是烹制中式面食, 也不是家常菜青椒土豆丝. 已知三人中有一个人说的全对, 有一个人说的对了一半, 剩下的一个

人说的全不对,由此推断小华选择的内容

A. 可能是家常菜青椒土豆丝

B. 可能是川菜干烧大虾

C. 可能是烹制西式点心

D. 可能是烹制中式面食

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -2 \leq x \leq 1, \\ \ln x - 1, & 1 < x \leq e, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ 恰有两个不同解 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则 $(x_2 - x_1)f(x_2)$ 的取值可能是

A. -3

B. -1

C. 0

D. 2

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知平面向量 $\vec{a} = (3, 4)$, 非零向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b} \perp \vec{a}$, 则 $\vec{b} = \underline{\hspace{2cm}}$. (答案不唯一, 写出满足条件的一个向量坐标即可)

14. 已知 $a > 0, b > 0, a + 4b = 4$, 则 $\frac{4}{a} + \frac{9}{b}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 已知函数 $f(x) = ax^2 + \ln x$ 满足 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1 - 2\Delta x)}{3\Delta x} = 2$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ 处的切线斜率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在正四棱锥 $P - ABCD$ 中, $\sqrt{2}PA = \sqrt{5}AB$, 若四棱锥 $P - ABCD$ 的体积为 $\frac{256}{3}$, 则该四棱锥外接球的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 4, 其前 n 项和为 S_n , 且 $2a_2$ 为 S_2, S_3 的等比中项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{4}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$.

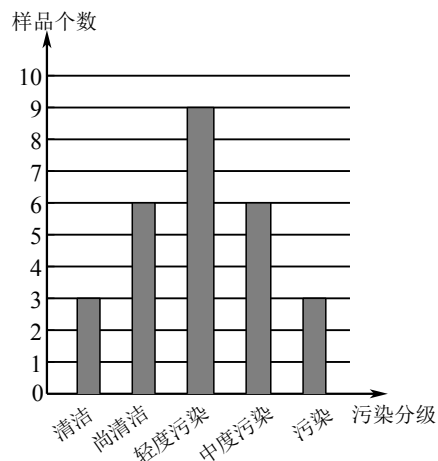
(1) 求 $\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值;

(2) 若点 D 为边 AB 的中点, $AB = 10, CD = 5$, 求 BC 的值.

19. (12 分)

为了树立和践行绿水青山就是金山银山的理念, 加强环境的治理和生态的修复, 某市在其辖区内某一个县的 27 个行政村中各随机选择农田土壤样本一份, 对样本中的铅、镉、铬等重金属的含量进行了检测, 并按照国家土壤重金属污染评价级标准 (清洁、尚清洁、轻度污染、中度污染、重度污染) 进行分级, 绘制了如图所示的条形图.

(1) 从轻度污染以上 (包括轻度污染) 的行政村中按分层抽样的方法抽取 6 个, 求在轻度、中度、重度污染的行政村中分别抽取的个数;



(2) 规定:轻度污染记污染度为1,中度污染记污染度为2,重度污染记污染度为3.从(1)中抽取的6个行政村中任选3个,污染度的得分之和记为 X ,求 X 的数学期望.

20. (12 分)

如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,底面 ABC 是等边三角形, D 是 AC 的中点

(1) 证明: $AB_1 \parallel$ 平面 BC_1D .

(2) 若 $AA_1 = 2AB$, 求二面角 $B_1 - AC - C_1$ 的余弦值.

21. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

且点 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 在 C 上.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设过 F_2 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF_1| \cdot |BF_1| = \frac{10}{3}$, 求 $|AB|$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x + m)e^x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是减函数, 求实数 m 的取值范围;

(2) 当 $m=0$ 时, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $nx \ln(nx) \leq f(2x)$ 恒成立, 求实数 n 的取值范围.

