

高三数学试卷参考答案

1. A 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

因为 $B = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$, 所以 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) = \{x | 5 < x < 7\}$.

2. D 【解析】本题考查复数的概念与运算,考查运算求解能力.

因为 $\frac{2+ai}{i} = 4-bi$, 所以 $2+ai = b+4i$, $a+b=6$.

3. B 【解析】本题考查三角恒等变换,考查运算求解能力.

由 $2\sin(\pi-\alpha) = 3\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$, 得 $2\sin \alpha = 3\cos \alpha$, 所以 $\tan \alpha = \frac{3}{2}$,

从而 $\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1}{\tan^2 \alpha + 1} = -\frac{1}{13}$.

4. D 【解析】本题考查函数的图象与性质,考查推理论证能力.

因为 $\cos x - 1 \neq 0$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 $x \neq 0$, 故排除 C; 而 $f(-x) = \frac{-x}{\cos(-x)-1} =$

$\frac{-x}{\cos x - 1} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, 其图象关于原点对称, 故排除 B; 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\cos x - 1 < 0$,

$f(x) = \frac{x}{\cos x - 1} < 0$, 所以排除 A. 故选 D.

5. C 【解析】本题考查统计图表的相关知识,考查数据处理能力和应用意识.

对于 A, 高三(2)班德智体美劳各项得分依次为 9.5, 9, 9.5, 9, 8.5, 所以极差为 $9.5 - 8.5 = 1$, A 错误; 对于 B, 两班的德育分相等, B 错误; 对于 D, 两班的劳育得分相差最大, D 错误, 从而 C 正确.

6. B 【解析】本题考查抛物线的定义,考查化归与转化的数学思想.

由抛物线的定义知 PF 的中点到 y 轴的距离等于 $\frac{|PF|}{2} = 3$, 又 $|PF| = x_P + 2 = 6$, 解得 $x_P = 4$, 代入抛物线方

程可得 $P(4, 4\sqrt{2})$. 因为 F 点的坐标为 $(2, 0)$, 所以直线 PF 的斜率为 $\frac{4\sqrt{2}-0}{4-2} = 2\sqrt{2}$.

7. A 【解析】本题考查双曲线的几何性质,考查数形结合的数学思想和运算求解能力.

由 $\frac{\overrightarrow{OF_1} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} + \frac{\overrightarrow{F_1P} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = 2\sqrt{3}$, 可得 $|OP| = 2\sqrt{3}$, 不妨设 $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, 所以 $|OP| =$

$\frac{1}{2} |F_1F_2|$, 所以点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上, 即 $\triangle PF_1F_2$ 是以 P 为直角顶点的直角三角形, 故 $|PF_1|^2 +$

$|PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$, 即 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 48$. 又 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 4$,

所以 $16 = ||PF_1| - |PF_2||^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| = 48 - 2|PF_1||PF_2|$, 解得 $|PF_1||PF_2| =$

16 , 所以 $S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1||PF_2| = 8$.

8. C 【解析】本题考查排列组合知识的应用,考查数据处理能力和应用意识.

排课可分为以下两大类: (1)“丝”被选中: 不同的方式种数为 $N_1 = C_4^2 A_2^2 A_3^3 A_4^4 - C_4^2 A_2^2 A_2^2 A_3^3 = 720$ 种; (2)“丝”不被选中: 不同的方式种数为 $N_2 = C_4^3 A_2^2 A_3^3 A_4^4 = 576$ 种. 故共有 $N = 720 + 576 = 1296$ 种.

9. ABD 【解析】本题考查三角函数的图象与性质,考查运算求解能力.

因为 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2\sin^2 x + 1 = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$, 其图象向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度后得到函数 $g(x) =$

$2\sin[2(x - \frac{\pi}{24}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(2x + \frac{\pi}{12})$ 的图象, 所以 $g(x)$ 的最小正周期为 π , A 正确; 当 $x = \frac{5\pi}{24}$ 时, $2x + \frac{\pi}{12} =$

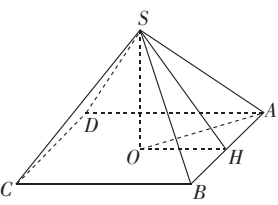
$\frac{\pi}{2}$, B 正确; 当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $2x + \frac{\pi}{12} \in [-\frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}]$, $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增是不正确的, C 错

误; 当 $x = -\frac{13\pi}{24}$ 时, $2x + \frac{\pi}{12} = -\pi$, 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{13\pi}{24}, 0)$ 对称, D 正确.

10. AC 【解析】本题考查立体几何知识,考查空间想象能力.

如图,在正四棱锥 $S-ABCD$ 中, O 为正方形 $ABCD$ 的中心, $SH \perp AB$,设底面边长为 $2a$. 因为 $\angle SHO = 30^\circ$, 所以 $OH = a$, $OS = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $SH = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. 在

$\text{Rt}\triangle SAH$ 中, $a^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3}a)^2 = 21$, 所以 $a = 3$, 底面边长为 6 米, $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} \times 4 = 24\sqrt{3}$ 平方米.



11. BD 【解析】本题考查逻辑推理知识,考查推理论证能力.

若小华选择的是家常菜青椒土豆丝,则甲对一半,乙对一半,丙对一半,不满足条件,排除;
若小华选择的是川菜干烧大虾,则甲全不对,乙对一半,丙全对,满足条件;
若小华选择的是烹制西式点心,则甲对一半,乙全对,丙全对,不满足条件,排除;
若小华选择的是烹制中式面食,则甲全对,乙全不对,丙对一半,满足条件.
故小华选择的可能是川菜干烧大虾或者烹制中式面食,所以选 BD.

12. BC 【解析】本题考查导数的综合应用,考查化归与转化的数学思想与推理论证能力.

因为 $f(x) = m$ 的两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 所以 $x_1 = \frac{m-2}{2}, x_2 = e^{m+1}, m \in (-1, 0]$, 从而 $(x_2 - x_1) f(x_2) = (e^{m+1} - \frac{m-2}{2})m = me^{m+1} - \frac{m^2}{2} + m$. 令 $g(x) = xe^{x+1} - \frac{1}{2}x^2 + x, x \in (-1, 0]$, 则 $g'(x) = (x+1)e^{x+1} - x + 1, x \in (-1, 0]$. 因为 $x \in (-1, 0]$, 所以 $x+1 > 0, e^{x+1} > e^0 = 1, -x+1 > 0$, 所以 $g'(x) > 0$ 在 $(-1, 0]$ 上恒成立, 从而 $g(x)$ 在 $(-1, 0]$ 上单调递增. 又 $g(0) = 0, g(-1) = -\frac{5}{2}$, 所以 $g(x) \in (-\frac{5}{2}, 0]$, 即 $(x_2 - x_1) \cdot f(x_2)$ 的取值范围是 $(-\frac{5}{2}, 0]$, 故选 BC.

13. $(4, -3)$, 答案不唯一 【解析】本题考查平面向量的垂直,考查运算求解能力.

设 $\mathbf{b} = (x, y)$, 因为 $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, 所以 $3x + 4y = 0$, 可取 $\mathbf{b} = (4, -3)$.

14. 16 【解析】本题考查均值不等式的应用,考查运算求解能力.

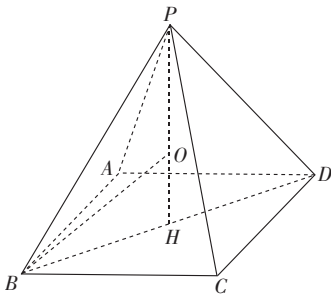
因为 $\frac{4}{a} + \frac{9}{b} = \frac{1}{4}(a+4b)(\frac{4}{a} + \frac{9}{b}) = \frac{1}{4}(40 + \frac{16b}{a} + \frac{9a}{b}), \frac{16b}{a} + \frac{9a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{16b}{a} \cdot \frac{9a}{b}} = 24$, 所以 $\frac{4}{a} + \frac{9}{b} \geq 16$.

15. 3 【解析】本题考查导数的概念及几何意义,考查运算求解能力.

由 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-2\Delta x)}{3\Delta x} = 2$, 可得 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-2\Delta x) - f(1)}{-2\Delta x} = 3$. 因为 $f'(x) = 2ax + \frac{1}{x}$, 所以 $f'(1) = 2a + 1 = 3$, 即 $a = 1$, 则 $f(x) = x^2 + \ln x$, 所以 $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}, f'(\frac{1}{2}) = 3$.

16. $\frac{500\pi}{3}$ 【解析】本题考查四棱锥的外接球问题,考查空间想象能力和运算求解能力.

如图,作 $PH \perp$ 平面 $ABCD$, 垂足为 H . 连接 BD , 则 H 为 BD 的中点. 设 $AB = 2m$, 则 $PB = PA = \sqrt{10}m, BH = \sqrt{2}m$, 从而 $PH = 2\sqrt{2}m$, 故四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times (2m)^2 \times 2\sqrt{2}m = \frac{8\sqrt{2}m^3}{3} = \frac{256}{3}$, 解得 $m = 2\sqrt{2}$. 由题意可知正四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心 O 在 PH 上, 连接 OB . 设正四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的半径为 R , 则 $R^2 = BH^2 + OH^2 = (PH - OH)^2$, 解得 $R = 5$, 故该四棱锥外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500\pi}{3}$.



17. 解: (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 4 的等差数列,

所以 $a_2 = a_1 + 4, S_2 = 2(a_1 + 2), S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2} \times 4 = 3(a_1 + 4)$ 2 分

又 $4a_2^2 = S_2 S_3$, 所以 $4(a_1 + 4)^2 = 6(a_1 + 2)(a_1 + 4)$, 即 $(a_1 + 4)(a_1 - 2) = 0$,
 解得 $a_1 = 2$ 或 $a_1 = -4$ (舍去), 4 分
 所以 $a_n = 2 + 4(n - 1) = 4n - 2$ 5 分

(2) 因为 $b_n = \frac{4}{a_n a_{n+1}} = \frac{4}{(4n - 2)(4n + 2)} = \frac{1}{4n - 2} - \frac{1}{4n + 2}$, 7 分
 所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n$
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{4n - 6} - \frac{1}{4n - 2} + \frac{1}{4n - 2} - \frac{1}{4n + 2}$ 8 分
 $= \frac{1}{2} - \frac{1}{4n + 2}$ 9 分
 $= \frac{n}{2n + 1}$ 10 分

评分细则:

法二: (1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 4 的等差数列, 且 $2a_2$ 为 S_2, S_3 的等比中项,
 所以 $4a_2^2 = S_2 S_3$, 从而 $4a_2^2 = S_2 \cdot 3a_2$ 2 分
 因为 $a_2 > 0$, 所以 $4a_2 = 3S_2$, 即 $4(a_1 + 4) = 3(2a_1 + 4)$, 3 分
 解得 $a_1 = 2$, 4 分
 所以 $a_n = 2 + 4(n - 1) = 4n - 2$ 5 分
 (2) 第二问解法同上.

18. 解: (1) 因为 $a \cos B - b \cos A = \frac{3}{5}c$, 所以 $a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{5}c$, 2 分
 即 $a^2 - b^2 = \frac{3}{5}c^2$ 3 分

又 $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A \cos B}{\cos A \sin B} = \frac{a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot b}$, 4 分
 所以 $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{8c^2}{5} \times \frac{5}{2c^2} = 4$ 5 分

(2) 作 AB 边上的高 CE , 垂足为 E (图略), 因为 $\tan A = \frac{CE}{AE}$, $\tan B = \frac{CE}{BE}$, 所以 $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{BE}{AE}$ 7 分
 又 $\frac{\tan A}{\tan B} = 4$, 所以 $BE = 4AE$ 8 分
 因为点 D 为边 AB 的中点, $AB = 10$, 所以 $BD = 5$, $AE = 2$, $DE = 3$ 9 分
 在直角三角形 CDE 中, $CD = 5$, 所以 $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 11 分
 在直角三角形 BCE 中, $BE = 8$, 所以 $BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ 12 分
 评分细则:

(1) 第一问中, 应用正弦定理或余弦定理得出部分关键结论的给 2 至 3 分, 全部正确的得 5 分.
 (2) 第二问中, 写到 $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{BE}{AE}$ 这一步累计得 7 分, 写出 $BE = 4AE$ 累计得 8 分, 算出 $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 累计得 11 分, 算出 $BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$ 累计得 12 分.
 (3) 其他情况根据评分标准依步骤给分.

19. 解: (1) 轻度污染以上 (包括轻度污染) 的行政村共 $9 + 6 + 3 = 18$ 个, 1 分
 所以从轻度污染的行政村中抽取 $\frac{6}{18} \times 9 = 3$ 个, 从中度污染的行政村中抽取 $\frac{6}{18} \times 6 = 2$ 个, 从重度污染的行政村中抽取 $\frac{6}{18} \times 3 = 1$ 个. 4 分
 (2) X 的所有可能取值为 3, 4, 5, 6, 7. 5 分

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}$, 6 分

$P(X=4)=\frac{C_3^2 C_2^1}{C_6^3}=\frac{3}{10}$, 7 分

$P(X=5)=\frac{C_3^2+C_3^1 C_2^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$, 8 分

$P(X=6)=\frac{C_3^1 C_2^2}{C_6^3}=\frac{3}{10}$, 9 分

$P(X=7)=\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{1}{20}$ 10 分

所以 X 的分布列为

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$

..... 11 分

所以 $E(X)=3\times\frac{1}{20}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{3}{10}+7\times\frac{1}{20}=5$ 12 分

评分细则:

- (1)第一问中,分别算出所抽取的轻度污染、中度污染、重度污染行政村的个数各得 1 分.
- (2)第二问中,写出 X 的所有可能取得 1 分,每算出一个概率得 1 分,最后算出 $E(X)=5$,累计得 12 分.
- (3)其他情况根据评分标准按步骤给分.

20. (1)证明:记 $B_1C\cap BC_1=E$,连接 DE .

由直棱柱的性质可知四边形 BCC_1B_1 是矩形,则 E 为 B_1C 的中点, 1 分

因为 D 是 AC 的中点,所以 $DE\parallel AB_1$ 2 分

因为 $AB_1\not\subset$ 平面 BC_1D , $DE\subset$ 平面 BC_1D ,所以 $AB_1\parallel$ 平面 BC_1D 4 分

(2)解:因为底面 ABC 是等边三角形, D 是 AC 的中点,所以 $BD\perp AC$,

由直棱柱的性质可知平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1 ,则 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1

..... 5 分

取 A_1C_1 的中点 F ,连接 DF ,则 DB,DC,DF 两两垂直,故以 D 为原点,分别以 $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.

设 $AB=2$,则 $A(0,-1,0),C(0,1,0),B_1(\sqrt{3},0,4)$,从而 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0),\overrightarrow{AB_1}=(\sqrt{3},1,4)$ 6 分

设平面 AB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2y=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\sqrt{3}x+y+4z=0, \end{cases}$ 令 $x=4$,得 $\boldsymbol{n}=(4,0,-\sqrt{3})$ 8 分

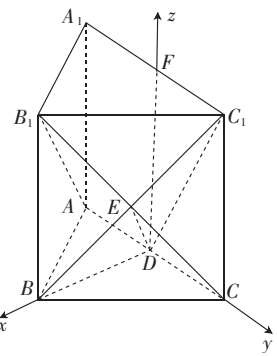
平面 ACC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$, 9 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{4}{\sqrt{19}}=\frac{4\sqrt{19}}{19}$ 11 分

设二面角 B_1-AC-C_1 为 θ ,由图可知 θ 为锐角,则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{4\sqrt{19}}{19}$ 12 分

评分细则:

- (1)第一问中,没有写出 $AB_1\not\subset$ 平面 BC_1D ,直接得到 $AB_1\parallel$ 平面 BC_1D ,不予扣分.
- (2)第二问中,可以用传统做法,先找出二面角 B_1-AC-C_1 的平面角 θ ,结合题中的等量关系,由余弦定理求出 $\cos\theta$,即得出二面角 B_1-AC-C_1 的余弦值,只要计算正确,不予扣分.若空间直角坐标系建立不同,只



要建系正确,计算正确,不予扣分.

(3)若用其他解法,参照评分标准按步骤给分.

21. 解:(1)因为椭圆 C 过点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$,

所以 $\frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1$. ① 1 分

又椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, 2 分

故 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{2}$. ② 3 分

联立①②得 $\begin{cases} \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1, \\ \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 2, \\ b^2 = 1, \end{cases}$ 故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时, $|AF_1| = |BF_1| = \frac{b^2}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $|AF_1| \cdot |BF_1| = \frac{1}{2} \neq \frac{10}{3}$, 6 分

故直线 l 的斜率存在, 设直线 $l: y = k(x-1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(2k^2+1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2+1}$, $x_1x_2 = \frac{2k^2-2}{2k^2+1}$ 7 分

$|AF_1| = \sqrt{(x_1+1)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1+1)^2 + 1 - \frac{x_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{(x_1+2)^2}{2}} = \frac{2+x_1}{\sqrt{2}}$, 9 分

同理 $|BF_1| = \frac{2+x_2}{\sqrt{2}}$ 10 分

因为 $|AF_1| \cdot |BF_1| = \frac{4+2(x_1+x_2)+x_1x_2}{2} = \frac{18k^2+2}{4k^2+2} = \frac{10}{3}$, 解得 $k^2 = 1$, 11 分

所以 $|AF_1| + |BF_1| = \frac{4+x_1+x_2}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$,

又因为 $|AF_1| + |BF_1| + |AB| = 4\sqrt{2}$, 所以 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 12 分

评分细则:

(1)第一问共 5 分, 将点 $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 代入椭圆方程, 得 1 分, 得出 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 1 分, 转化为 a, b 之间的关系得 1 分, 联立方程得 1 分, 正确写出椭圆的标准方程得 1 分.

(2)第二问总共 7 分, 未讨论直线 l 斜率不存在的情况, 直接设直线 $l: y = k(x-1)$ 扣 1 分, 联立方程并由韦达定理求出 $x_1 + x_2, x_1x_2$ 的式子得 1 分, 求得 $|AF_1| = \frac{2+x_1}{\sqrt{2}}$ 得 2 分, 同理得出 $|BF_1| = \frac{2+x_2}{\sqrt{2}}$ 得 1 分, 求出 $k^2 = 1$ 得 1 分, 求出 $|AB| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 得 1 分.

(3)第二问中, 直线 l 的方程为也可以设为 $x = my + 1$, 参照上述步骤酌情给分.

22. 解:(1)因为 $f(x) = (x+m)e^x$, 所以 $f'(x) = (x+m+1)e^x$ 1 分

令 $f'(x) \leq 0$, 得 $x \leq -m-1$, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -m-1]$ 3 分

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 上是减函数, 所以 $-m-1 \geq 1$, 解得 $m \leq -2$, 即 m 的取值范围是 $(-\infty, -2]$ 5 分

(2)由 $nx \ln(nx) \leq f(2x)$, 得 $2xe^{2x} \geq nx \ln(nx)$.

因为 $x > 0, n > 0$, 所以 $\frac{2e^{2x}}{n} - \ln x - \ln n \geq 0$ 对于任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 6 分

设 $h(x) = \frac{2}{n}e^{2x} - \ln x - \ln n, x > 0, n > 0$, 则 $h'(x) = \frac{4}{n}e^{2x} - \frac{1}{x}$.

因为函数 $y = e^{2x}$ 和 $y = -\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上均为单调递增函数, 所以函数 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h'(x) > 0$.

故存在 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $h'(x_0) = \frac{4}{n}e^{2x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$, 即 $\frac{2}{n}e^{2x_0} = \frac{1}{2x_0}$ 8 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{2}{n}e^{2x_0} - \ln x_0 - \ln n = \frac{1}{2x_0} - \ln x_0 - \ln n \geq 0$ 恒成立. 9 分

又由 $\frac{4}{n}e^{2x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$, 得 $n = 4x_0e^{2x_0}$,

所以 $h(x_0) = \frac{1}{2x_0} - 2x_0 - 2\ln x_0 - 2\ln 2 \geq 0$ 恒成立. 10 分

因为 $y = \frac{1}{2x} - 2x$ 和 $y = -2\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以函数 $h(x_0)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $h(\frac{1}{2}) = 0$, 所以 $x_0 \in (0, \frac{1}{2}]$ 11 分

因为函数 $y = 4x$ 和 $y = e^{2x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $4x > 0, e^{2x} > 0$.

所以函数 $n = 4x_0e^{2x_0}$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递增,

所以 $0 < n \leq 2e$, 即实数 n 的取值范围是 $(0, 2e]$ 12 分

评分细则:

法二: (1) 同上面解法(1).

(2) 对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $nx \ln(nx) \leq f(2x)$ 恒成立, 即 $nx \ln(nx) \leq 2xe^{2x}$ 恒成立, 亦即 $e^{\ln(nx)} \ln(nx) \leq 2xe^{2x}$ 恒成立. 6 分

因为 $f(x) = xe^x$, 所以 $f'(x) = (x+1)e^x$, 易知 $f(x) = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且在 $(-\infty, 0)$ 上 $f(x) < 0$, 所以 $\ln(nx) \leq 2x$, 即 $n \leq \frac{e^{2x}}{x}$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 8 分

令 $g(x) = \frac{e^{2x}}{x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$ 9 分

当 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$. 则 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = 2e$ 11 分

所以 $n \leq 2e$, 显然 $n > 0$, 故实数 n 的取值范围是 $(0, 2e]$ 12 分