2021 年普通高等学校招生全国统一考试
高三第一次联合诊断检测　数学参考答案

一、单选题

1～4 DBDA　　5～8 DDDC

第（6）题解析：由均值不等式 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立），$ab=a+b+8\geqslant 2\sqrt{ab}+8$，
即 $(\sqrt{ab}-4)(\sqrt{ab}+2)\geqslant 0$，$\therefore ab\geqslant 16$，当且仅当 $a=b=4$ 时 ab 取到最小值16.

第（7）题解析：根据图形的对称性可知 $\overrightarrow{ES}=\overrightarrow{RC},\ \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QC}$，故 $\overrightarrow{ES}-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{RC}-\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{RQ}$，
又 $|\overrightarrow{RQ}|=|\overrightarrow{PT}|$，$|\overrightarrow{BQ}|=|\overrightarrow{AT}|$，故 $\overrightarrow{RQ}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{QB}$，$\therefore \lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

第（8）题解析：当 $x>0$ 时，$f'(x)-2x>0\Rightarrow (f(x)-x^2)'>0$，令 $g(x)=f(x)-x^2$，则函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $g(-x)=f(-x)-(-x)^2=f(x)-x^2=g(x)$，故 $g(x)$ 为偶函数，
$f(2-x)-f(x)>4-4x\Leftrightarrow f(2-x)-(2-x)^2>f(x)-x^2$，即 $g(2-x)>g(x)$，
$\therefore |2-x|>|x|$，解得 $x<1$.

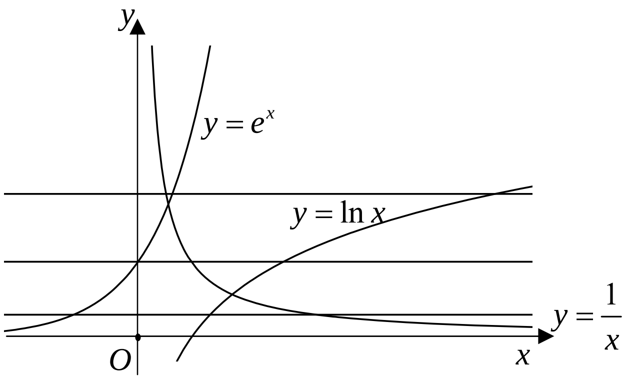
二、多选题

9．BC　　10．AD　　11．ACD　　12．ABC

第（9）题解析：由题中数据知，营业收入最低的是其它类，A 错；生鲜区的净利润占比 $65.8\%>\dfrac{1}{2}$，故 B 正确；
生鲜区的营业利润率为 $\dfrac{65.8\%}{48.6\%}\times 32.5\%<50\%$，故 D 错；同理可计算其他各区的营业利润率，
显然日用品区为 $\dfrac{20.2\%}{10.8\%}\times 32.5\%$，最高，故 C 正确.

第（10）题解析：当 $x+2\pi\geqslant 0$ 时 $\cos|x+2\pi|=\cos(x+2\pi)=\cos x=\cos|x|$，当 $x+2\pi<0$ 时
$\cos|x+2\pi|=\cos(-x-2\pi)=\cos(-x)=\cos|x|$，又 $|\cos(x+2\pi)|=|\cos x|$，故
$f(x+2\pi)=f(x)$，即 2π 为 $f(x)$ 的周期；$f(\dfrac{\pi}{2})=0,\ f(\pi)=1-1=0$，故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上不单减；$f(0)=2\neq 0$，故 $f(x)$ 不是奇函数；当 $2\pi-x\geqslant 0$ 时
$\cos|2\pi-x|=\cos(2\pi-x)=\cos x=\cos|x|$，当 $2\pi-x<0$ 时
$\cos|2\pi-x|=\cos(x-2\pi)=\cos x=\cos|x|$，又 $|\cos(2\pi-x)|=|\cos x|$，故
$f(2\pi-x)=f(x)$，$f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，所以 D 正确.

第（11）题解析：如图，在同一坐标系中画出
函数 $y=e^x,\ y=\ln x,\ y=\dfrac{1}{x}$ 的图象，
当直线 $y=m$ 与三者都相交时，
交点的横坐标即为 a,b,c 的值，
由图知，当 m 从大变到小时，
依次出现 $c<a<b$、$a<c<b$、$a<b<c$.



第（12）题解析：由题知 $b_3+b_4=2(b_2+b_3)\Rightarrow b_4-b_3-2b_2=0\Rightarrow q^2-q-2=0\Rightarrow q=2$ 或 -1（舍），故 $b_n=2^n$，
$a_n+n=2b_n-2b_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n$，$a_n=2^n-n$，$a_n-b_n=-n$，故 $\{a_n-b_n\}$ 为等差数列，A

正确；$S_n=2+2^2+\cdots+2^n-(1+2+\cdots+n)=2(2^n-1)-\dfrac{n(n+1)}{2}$，B 正确；

$a_{n+1}-a_n=2^n-1\geqslant 1$，故$\{a_n\}$单增，C 正确；当$n=1$时，$\dfrac{1}{a_1}=1$，$2(1-\dfrac{1}{b_1})=1$，矛盾，故 D 错误；.

三、填空题

13．-8　　14．560　　15．$\sqrt{10}$　　16．π

第（15）题解析：$A=2B\Rightarrow\sin A=\sin 2B\Rightarrow\sin A=2\sin B\cos B$，由正弦定理得$a=2b\cos B$，又由余弦定理得$a=2b\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，代入$b=2$，$c=3$得$a^2=10$，故$a=\sqrt{10}$.

第（16）题解析：$OD_1=\sqrt{5}$，取AB中点O_1，则$OO_1\perp AB$且$OO_1=\sqrt{3}$，又$AA_1\perp$平面$ABCD$，$\therefore AA_1\perp OO_1$，$\therefore OO_1\perp$平面$ABB_1A_1$，故球$O$截侧面$ABB_1A_1$所得图形是以$O_1$圆心、$\sqrt{5-3}$为半径的半圆，$\therefore S=\pi$.

四、解答题

17．（10 分）

解：若①②③，则④. 此为真命题，……2 分　　理由如下：

②$\Rightarrow bc\sin A=4\sqrt{7}$，③$\Rightarrow\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，故$bc=16$，　……6 分

$\dfrac{b^2+c^2-16}{32}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow b^2+c^2=40$，$\therefore\dfrac{b^2+c^2}{bc}=\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{5}{2}$，即$\dfrac{b}{c}=2$或$\dfrac{1}{2}$.　……10 分

任选其中三个作条件，另一个作结论所得命题均为真命题，证明同理.

18．（12 分）

解：（1）$f(x)=\sin x(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\dfrac{1}{2}\sin x)+1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{4}(\cos 2x-1)+1=\dfrac{1}{2}\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{3}{4}$，

$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<2x+\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore f(x)$的单增区间为$(k\pi-\dfrac{\pi}{3},k\pi+\dfrac{\pi}{6})\ k\in Z$；　……6 分

（2）$f(\alpha)=\dfrac{1}{2}\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}\cos(2\alpha-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{3}{4}=\cos^2(\alpha-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{36}$.　……12 分

19．（12 分）

解：（1）$S_4=a_9\Rightarrow 4a_1+6d=a_1+8d\Rightarrow 3a_1=2d$，$a_6=2a_3+1\Rightarrow d=a_1+1$，$\therefore a_1=2$，$d=3$，

$\therefore a_n=2+3(n-1)=3n-1$；　……5 分

（2）由题知$S_n=\dfrac{2+3n-1}{2}\cdot n=\dfrac{3}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n$，$b_n=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，　……8 分

$\therefore T_n=\frac{2}{3}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{3(n+1)}$，$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{3n-1}{3n+2}$， ……10 分

$T_n-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{-3n^2-2n+3}{3(n+1)(3n+2)}<0$，故 $T_n<\frac{a_n}{a_{n+1}}$. ……12 分

20.（12 分）

解：（1）由题知 $\overline{x}=6.5$，$\overline{y}=80$， ……2 分

$\hat{b}=\frac{360+420+498+560+600+612-6\times6.5\times80}{16+25+36+49+64+81-6\times6.5^2}=-4$， ……4 分

$\hat{a}=80-(-4)\times6.5=106$，……6 分

故所求回归方程为 $\hat{y}=-4x+106$； ……7 分

（2）由题知，当每件售价定为 x 元时，企业获利 $z=(x-5)(-4x+106)=-4x^2+126x-530$，……10 分

对称轴为 $x=15.75$，故当 $x=16$ 时，z 最大，即每件售价定为16元. ……12 分

21.（12 分）

解：（1）$f(x)=x^2+\frac{1}{x}$，$f'(x)=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$，$f'(x)>0\Rightarrow x>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$， ……3 分

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$ 上单减，在 $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty)$ 上单增； ……6 分

（2）$f(x)=0\Leftrightarrow a=-x-\frac{1}{x^2}-1$，令 $g(x)=-x-\frac{1}{x^2}-1\ (x>0)$，则 $g'(x)=-1+\frac{2}{x^3}=\frac{2-x^3}{x^3}$，

$g'(x)>0\Rightarrow 0<x<\sqrt[3]{2}$，故 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt[3]{2})$ 上单增，在 $(\sqrt[3]{2},+\infty)$ 上单减， ……9 分

$x\to0$ 时 $g(x)\to-\infty$，$g(\sqrt[3]{2})=-\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}-1$，$x\to+\infty$ 时 $g(x)\to-\infty$，

故 $f(x)$ 无零点只需 $a>g(\sqrt[3]{2})$，又 $(\frac{4}{3})^3=\frac{64}{27}>2$，故 $1<\sqrt[3]{2}<\frac{4}{3}$，$\therefore\frac{3}{2}<\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}<2$，

$\therefore -3<g(\sqrt[3]{2})<-2$，$\therefore$ 整数 a 的最小值为 -2. ……12 分

22.（12 分）

解：（1）由题知 $\begin{cases}a^2+b^2=4\\2ab=2\sqrt{3}\end{cases}$，解得 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$； ……4 分

（2）椭圆 C 的下顶点为 $(0,-1)$，由题知 M，N 均不是椭圆的上下顶点，

当直线 MN 的斜率存在时，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m\ (m\neq\pm1)$，点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=kx+m\\\frac{x^2}{3}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow (3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

$\Delta = 12(3k^2 - m^2 + 1) > 0$，且 $x_1 + x_2 = -\dfrac{6km}{3k^2+1}$，$x_1x_2 = \dfrac{3m^2-3}{3k^2+1}$，①

由题知 $\dfrac{y_1+1}{x_1} + \dfrac{y_2+1}{x_2} = 2$，即 $\dfrac{kx_1+m+1}{x_1} + \dfrac{kx_2+m+1}{x_2} = 2$，即 $2k + (m+1)\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = 2$，将①式代入得

$2k + (m+1)\dfrac{-6km}{3m^2-3} = 2$，整理得 $\dfrac{-k}{m-1} = 1$，即 $k + m = 1$，所以直线 MN 过点 $(1，1)$，　……8 分

当直线 MN 的斜率不存在时，设 $M(x_0，y_0)$，$N(x_0，-y_0)$，则 $\dfrac{y_0+1}{x_0} + \dfrac{-y_0+1}{x_0} = 2$ 即 $x_0 = 1$，……9 分

综上，直线 MN 恒过定点 $P(1，1)$． 结合图形知，当 $AP \perp MN$ 时，点 A 到直线 MN 的距离最远，

即为 $|AP| = \sqrt{5}$，此时 $k = -2，m = 3$，$\Delta = 12(12 - 9 + 1) > 0$，这样的直线 MN 存在，

故点 A 到直线 MN 的距离的最大值为 $\sqrt{5}$．　……12 分