2021年春季鄂东南省级示范高中教育教学改革联盟学校5月联考

高三数学参考答案

1—8．BBAB　CDCD

9—12．BC　AB　BD　ABD

13．-10　　14．$f(x)=\sin\frac{5\pi}{2}x$【答案不唯一】　　15．-2　　16．$\sqrt{13}$

17．解：（1）$\because a\cos B+b\cos A+2c\cos C=0,$

$\therefore \sin A\cos B+\sin B\cos A+2\sin C\cos C=0, \therefore \sin C+2\sin C\cos C=0$

$\because 0<C<\pi, \therefore \sin C\neq 0, \therefore \cos C=-\frac{1}{2}.$

$\because 0<C<\pi, \therefore C=\frac{2\pi}{3}.$ ……………………………………………………………………5分

（2）$\because C=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2+ab$，即$a^2+b^2+ab=9$．

$\because a^2+b^2\geqslant 2ab$，$\therefore a^2+b^2+ab\geqslant 3ab$，$\therefore 3ab\leqslant 9, ab\leqslant 3$．

$\therefore S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$，当且仅当$a=b=\sqrt{3}$时取等号.

$\therefore\triangle ABC$面积S的最大值为$\frac{3}{4}\sqrt{3}$． ……………………………………………………10分

18．解：（1）由$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{3}{2}$，得$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为1，公差为$\frac{3}{2}$的等差数列，

$\therefore \frac{S_n}{n}=1+\frac{3}{2}(n-1)=\frac{3n-1}{2}$，$\therefore S_n=\frac{3n^2-n}{2}$．

当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3n-2$，

$a_1=1$符合上式，所以$a_n=3n-2$． ……………………………………………………5分

（2）$\because b_n=\frac{na_n}{S_n+n}=\frac{2(3n-2)}{3n+1}$，

$\therefore T_n=b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdots b_n=2^n\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{10}\cdots\frac{3n-2}{3n+1}=\frac{2^n}{3n+1}$．

$\therefore T_{n+1}-T_n=\frac{2^{n+1}}{3(n+1)+1}-\frac{2^n}{3n+1}=\frac{2^n(3n-2)}{(3n+1)(3n+4)}>0$，

$\therefore T_{n+1}>T_n$，$(T_n)_{\min}=T_1=\frac{1}{2}$．

因为对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$t\leqslant 4T_n$恒成立，

所以$t\leqslant 4T_1=2$，即$t\leqslant 2$． ……………………………………………………12分

19．解：（1）证明：由题意知$EF\perp AE$，$EF\perp BE$，

而$AE\subset$平面ABE，$BE\subset$平面ABE，$AE\cap BE=E$，

$\therefore EF\perp$平面ABE，

$\because BC\,//\,EF$，$\therefore BC\perp$平面ABE，

又$\because BC\subset$平面ABC，$\therefore$平面$ABC\perp$平面ABE； ……………………………………4分

（2）【解法一】延长BE,CF交于点P，则AP为平面ABE和平面ACF的交线.过B作$BQ\perp AP$于Q，连接CQ.

$\because BC\subset$平面ABC，$\therefore BC\perp AP$，又$BQ\perp AP$，$\therefore AP\perp$平面BCQ，所以$\angle BQC$即为平面AFC与平面ABE所成的角； ……………………………………………………………………8分

设$AE=x$，则$BE=4-x$，$AB=\sqrt{x^2-(4-x)^2}=\sqrt{8x-16}$，且$x\in(2,4)$，

在Rt$\triangle ABP$中，$BQ=\frac{AB\cdot BP}{AP}=\frac{4\sqrt{8x-16}}{\sqrt{8x-16+16}}=\frac{4\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x}}$，． ……………………………10分

$\therefore\cos\angle BQC=\frac{4\sqrt{2x-4}}{\sqrt{2x+16(2x-4)}}=\frac{4\sqrt{2x-4}}{\sqrt{(2x-4)+16(2x-4)+4}}$．

令$t=\sqrt{2x-4}\in(0,2)$，则$\cos\angle BQC=\frac{4t}{\sqrt{17t^2+4}}=\frac{4}{\sqrt{17+\frac{4}{t^2}}}\in\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$． ………………12分

【解法二】设$AE=x$，则$BE=4-x$，$AB=\sqrt{x^2-(4-x)^2}=\sqrt{8x-16}$，且$x\in(2,4)$．

由（1）知BA,BC,BE两两互相垂直，分别以BE,BC,BA为x轴，y轴，z轴建立直角坐标系，则$B(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(0,0,\sqrt{8x-16})$，$E(4-x,0,0)$，$F\left(4-x,\frac{x}{4},0\right)$，则

$\overline{AF}=\left(4-x,\frac{x}{4},-\sqrt{8x-16}\right)$，$\overline{CF}=\left(4-x,\frac{x}{4}-1,0\right)$． ……………………………………7分

设平面ACF的法向量为$\vec{m}=(a,b,c)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overline{AF}=0,\\ \vec{m}\cdot\overline{AF}=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=4a,\\ c=\frac{2}{\sqrt{2x-4}}a.\end{cases}$

取$\vec{m}=\left(1,4,\frac{2}{\sqrt{2x-4}}\right)$， ……………………………………………………………10分

又平面ABE的法向量为$\vec{n}=(0,1,0)$，所以$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{4}{\sqrt{17+\frac{2}{x-2}}}$，

$\because x\in(0,2)$，所以$\cos<\vec{m},\vec{n}>\in\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$．

所以平面 AFC 和平面 ABE 所成的锐二面角的余弦值的取值范围是 $\left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ …………12 分

20．解：（1）由题意知 $\xi \sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，故 ξ 的所有可能取值为 $0,1,2,3$．

$P(\xi=0)=C_3^0\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$，$P(\xi=1)=C_3^1\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$，

$P(\xi=2)=C_3^2\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$，$P(\xi=3)=C_3^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$，$\xi$ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

……………………………………………………………4分

（2）依题意，η 的所有可能的值是 $0,1,2,\cdots,n$．

当 $0\leqslant k\leqslant n-1$ 时，$P(\eta=k)=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^k$；

当 $k=n$ 时，$P(\eta=k)=\left(\frac{3}{5}\right)^n$， ……………………………………………………8分

$\therefore E(\eta)=0\cdot\frac{2}{5}+1\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)+2\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+(n-1)\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n$，①

$\therefore \frac{3}{5}E(\eta)=1\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+2\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots+(n-1)\cdot\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n+n\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$，②

由①②，得 $\frac{2}{5}E(\eta)=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\left[n-\frac{2(n-1)}{5}\right]\left(\frac{3}{5}\right)^n-n\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$，

$\therefore \frac{2}{5}E(\eta)=\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^n+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$，

$\therefore E(\eta)=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]$． ……………………………………………………12分

21．解：（1）设 $A(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}x_0+\frac{p}{2}=\frac{3}{2},\\ {x_0}^2+2px_0=\frac{9}{4},\end{cases}$ 解得 $p=2$（负值舍去）． ……………………4 分

（2）不妨设 $k_{MA}=k_1,k_{MB}=k_2,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(t^2,2t)$ $(t>\sqrt{2})$．

设过点 M 作椭圆的切线方程为 $y=k(x-t^2)+2t$，①

由 $\begin{cases}y=k(x-t^2)+2t,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$，得 $(3+4k^2)x^2+8k(2t-t^2k)x+4(2t-t^2k)^2-12=0$， ……………6 分

由 $\Delta=0$ 得 $(t^4-4)k^2-4t^3k+4t^2-3=0$，所以 $k_1+k_2=\frac{4t^3}{t^4-4},k_1k_2=\frac{4t^2-3}{t^4-4}$， ……………8 分

在①中令 $x=-2$ 得，$y=-(t^2+2)k+2t$，

$\therefore|AB|=|y_1-y_2|=(t^2+2)|k_1-k_2|=(t^2+2)\frac{2\sqrt{3t^4+16t^2-12}}{|t^4-4|}=10$，

解得 $t^2=4$，点 M 的坐标为 $(4,\pm4)$． ……………………………………………………12 分

22．解：（1）$f'(x)=2(x-\sin 2x)$，$\therefore f'(0)=0$，所以 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的一个零点.

令 $g(x)=x-\sin 2x(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2})$，则 $g'(x)=1-2\cos 2x=0$ 时，$x=\frac{\pi}{6}$，

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $g_{\min}(x)=g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$．

又 $g(0)=0$，且 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一零点 $x_0\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $f'(x)=2g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上亦存在唯一零点.

因为 $f'(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上也存在唯一零点 $-x_0$．

综上所述，当 $a=1$ 时，$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的零点个数为3． ……………6 分

（2）不等式 $2\cos(2\sin x)+a^2x^2\leqslant af(x)$ 恒成立，即不等式 $\cos(2\sin x)\leqslant a\cos^2 x$ 恒成立.

令 $\sin x=t\in[-1,1]$，则等价于不等式 $\cos 2t\leqslant a(1-t^2)$ ………（1）恒成立，

①若 $t^2=1$，即 $t=\pm1$ 时，不等式（1）显然成立，此时 $a\in\mathbf{R}$；

②若 $-1<t<1$ 时，不等式（1）等价于 $a\geqslant\frac{\cos 2t}{1-t^2}$………（2）

设 $h(t)=\frac{\cos 2t}{1-t^2}(-1<t<1)$，则

当 $0\leqslant t<1$ 时，$h'(t)=\frac{2[t\cos 2t-(1-t^2)\sin 2t]}{(1-t^2)^2}$，

令 $\varphi(t)=t\cos 2t-(1-t^2)\sin 2t$ $(0\leqslant t<1)$ 则 $\varphi'(t)=(2t^2-1)\cos 2t$，

$\because\varphi'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$，$\because\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，且 $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4}<1$，

$\therefore\varphi(t)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，

又 $\varphi(0)=0$，$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{16}-1<0$，所以 $\varphi(t)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，

所以 $h(t)$ 在 $[0,1)$ 上单调递减，则 $h(t)\leqslant h(0)=1$，

显然$h(t)$为偶函数，故$h(t)$在$[-1,1]$上的最大值为 1，

因此$a\geqslant 1$，综上所述，满足题意的实数a的取值范围为$[1,+\infty)$．　………………………………12 分