

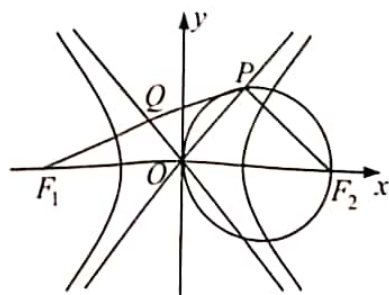
高三数学试卷

命题学校：黄冈中学 命题教师：龙燕 阮莉华 董明秀 审题教师：张晓光

考试时间：2021 年 05 月 10 日下午 15:00—17:00 试卷满分：150 分

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

- 已知集合 $U = \mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | (x-4)(x-1) < 0\}$ ， $B = \{x | \log_3 x > 1\}$ ，则 $A \cap (\complement_U B) =$ ()
 A. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ B. $\{x | 1 < x \leq 3\}$ C. $\{x | 1 < x < 3\}$ D. $\{x | 1 \leq x < 4\}$
- 已知 a 为实数，复数 $z = (a-2) + ai$ (i 为虚数单位)，复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$ ，若 $z^2 < 0$ ，则 $1 - \bar{z} =$ ()
 A. $1-2i$ B. $1+2i$ C. $2+i$ D. $2-i$
- 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 + a_2 = 10, a_3 + a_4 = 20$ ，则 $a_7 + a_8 =$ ()
 A. 80 B. 100 C. 120 D. 140
- 甲、乙、丙、丁四位同学决定去巴城老街、千灯古镇、周庄游玩，每人只能去一个地方，周庄一定要有人去，则不同游览方案的种数为 ()
 A. 60 B. 65 C. 70 D. 75
- 关于直线 $l: ax + by + 1 = 0$ ，有下列四个命题：
 甲：直线 l 经过点 $(0, -1)$ ； 乙：直线 l 经过点 $(1, 0)$ ；
 丙：直线 l 经过点 $(-1, 1)$ ； 丁： $ab < 0$.
 如果只有一个假命题，则该命题是 ()
 A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁
- 已知 $\triangle ABC$ 的外心为 O ， $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ， $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AB}| = 2$ ，则 $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值是 ()
 A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 6
- 如图，已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，以 OF_2 为直径的圆与双曲线 C 的渐近线在第一象限的交点为 P ，线段 PF_1 与另一条渐近线交于点 Q ，且 $\triangle OPF_2$ 的面积是 $\triangle OPQ$ 面积的 2 倍，则该双曲线的离心率为 ()



A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. $\sqrt{3}$

8. 已知实数 a, b 满足 $a = e^{7-a}$, $3 + \ln b = e^{4-\ln b}$, 则 $ab =$ ()

A. 3

B. 4

C. e^3

D. e^4

二、多选题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有错选的得 0 分.)

9. 已知 a, b 均为正数, 且 $a - b = 1$, 则 ()

A. $a > 2\sqrt{b}$

B. $2^a - 2^b > 1$

C. $\frac{4}{a} - \frac{1}{b} \leq 1$

D. $a + \frac{1}{b} > 3$

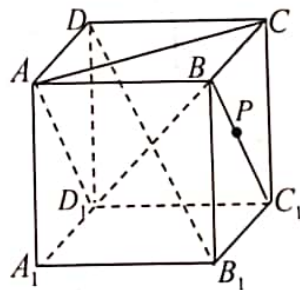
10. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 则下列判断中正确的是 ()

A. 三棱锥 $A - D_1PC$ 的体积是 $\frac{1}{6}$;

B. $DP \parallel$ 平面 AB_1D_1 ;

C. 平面 PB_1D 与平面 ACD_1 所成的二面角为 60° ;

D. 异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的范围是 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$



11. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上, 对称中心与对称轴 $x = \frac{\pi}{12}$ 的最小距离为 $\frac{\pi}{4}$,

则下列结论正确的是 ()

A. $f(x) + f\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) = 0$

B. 当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) \geq -\sqrt{3}$

C. 若 $g(x) = 2\cos 2x$, 则 $g\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f(x)$

D. 若 $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\frac{4}{5}, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 $\frac{4-3\sqrt{3}}{5}$

12. 函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 若 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) = f(x_2) = m$, π 是圆周率, $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的

底数, 则下列说法正确的是 ()

A. $0 < m < \frac{1}{e}$

B. $f(2) < f(3)$

C. $x_1 x_2 < e^2$

D. 若 $a = e^3, b = 3^e, c = e^\pi, d = \pi^e, s = 3^\pi, t = \pi^3$, 则 s 最大



三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 在 $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^5$ 的二项展开式中, x^2 的系数是_____.

14. 请写出满足条件 “ $f(x) \leq f(1)$ 对任意的 $x \in [0, 1]$ 恒成立, 且 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是增函数” 的一个函数:_____.

15. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 l 过抛物线 C 的焦点与抛物线交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆与抛物线的准线的公共点是 $M(-1, -1)$, 则直线 l 的斜率 $k =$ _____.

16. 无人侦察机在现代战争中扮演着非常重要的角色, 我国最新款的无人侦察机名叫 “无侦-8”.

无侦-8 (如图 1 所示) 是一款以侦察为主的无人机, 它配备了 2 台火箭发动机, 动力强劲, 据报道它的最大飞行速度超过 3 马赫, 比大多数防空导弹都要快. 如图 2 所示, 已知空间中同时出现了

A, B, C, D 四个目标 (目标和无人机的大小忽略不计), 其中 $AB = AD = BD = 6akm$, $CD = 3\sqrt{3}akm$,

$BC = 3akm$, 且目标 A, B, D 所在平面与目标 B, C, D 所在平面满足二面角 $A-BD-C$ 的大小是 $\frac{2\pi}{3}$,

若无人机可以同时观察到这四个目标, 则其最小侦察半径为_____ akm .



图 1

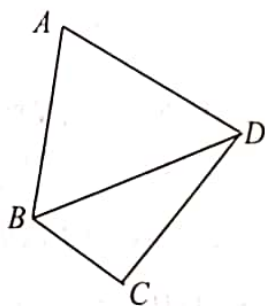


图 2

四、解答题 (本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.)

17. (10 分) 设 a, b, c 分别是 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 的对边, $a \cos B + b \cos A + 2c \cos C = 0$.

(1) 求 C ;

(2) 若 $c = 3$, 求 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值.

18. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{3}{2}$, $a_1 = 1$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;



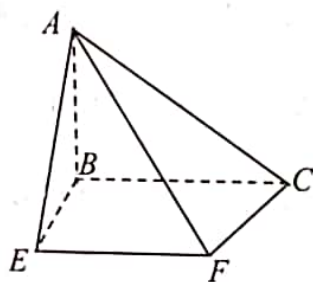
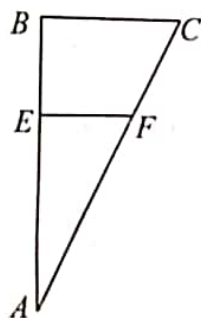
(2) 设 $b_n = \frac{na_n}{S_n + n}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 T_n , 若对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $t \leq 4T_n$ 恒成立, 求实数 t 的最大值.

19. (12 分) 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $AB = 4, BC = 1$, E, F 为 AB, AC 上的动点, 且 $EF \parallel BC$,

将三角形 AEF 沿 EF 折起至如图所示, 使平面 $ABC \perp$ 平面 $BCEF$.

(1) 证明: 平面 $ABC \perp$ 平面 ABE ;

(2) 求平面 AFC 和平面 ABE 所成的锐二面角的余弦值的取值范围.



20. (12 分) 随着我国互联网的不断发展, 自媒体业飞速发展起来, 抖音、快手、微信视频号等等视频自媒体 APP, 几乎是全民参与. 某中学社会调研社团研究抖音在生活中的普及程度, 走向街头巷尾、公园, 各行各业办公室, 对市民进行调研, 发现约有 $\frac{2}{5}$ 的人发过抖音小视频. 为进一步研究, 从这些被采访的人中随机抽取 3 人进行调查, 假设每个人被选到的可能性相等.

(1) 记 ξ 表示发过抖音视频的人数, 求 ξ 的分布列;

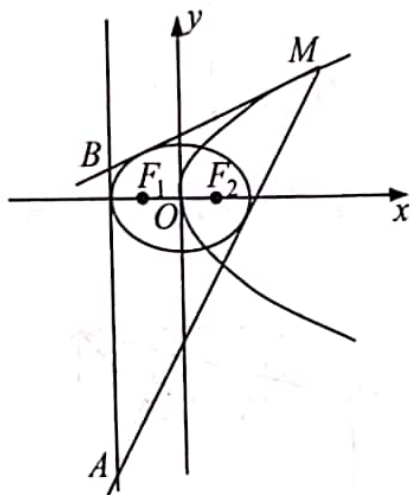
(2) 随着研究人群范围的扩大, 为提高效率, 研究组在对某些行业人群集中调研时, 先随机抽取一人, 如果他发过抖音小视频, 就不再对该群体中其他人进行调查, 如果没有发过抖音小视频, 则继续随机抽取, 直到抽到一名发过抖音小视频的人为止, 并且规定抽样的次数不超过 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次, (其中 n 小于当次调查的总人数), 在抽样结束时, 抽到的没发过抖音视频的人数为 η , 求 η 的数学期望.



21. (12分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为点 F , P 为 C 上一点, 若点 P 到原点的距离与点 P 到点 F 的距离都是 $\frac{3}{2}$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 动点 M 在抛物线 C 上, 且在直线 $x=2$ 的右侧, 过点 M 作椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的两条切线分别交直线 $x=-2$ 于 A, B 两点. 当 $|AB|=10$ 时, 求点 M 的坐标.



22. (12分) 已知函数 $f(x) = 2\cos^2 x + ax^2$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的零点个数;

(2) 若关于 x 的不等式 $2\cos(2\sin x) + a^2x^2 \leq af(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

