

贵阳市 2022 届高三年级摸底考试试卷

理科数学

2021 年 8 月

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分.考试时间为 120 分钟.

注意事项:

1. 答卷前，考生务必将姓名、报名号、座位号用钢笔填写在答题卡相应位置上.
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.
4. 请保持答题卡平整，不能折叠.考试结束后，监考老师将试题卷、答题卡一并收回.

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x | 1 < x \leq 3\}$, 则 $A \cap B =$

- | | |
|------------|------------|
| A. $(1,2)$ | B. $(1,2]$ |
| C. $[0,3]$ | D. $(0,1)$ |

2. 若复数 $z = \frac{-3+2i}{i}$ (i 是虚数单位), 则 z 在复平面内对应的点位于

- | | |
|---------|---------|
| A. 第一象限 | B. 第二象限 |
| C. 第三象限 | D. 第四象限 |

3. 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 则 $\sin 2\alpha =$

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| A. $\frac{4}{5}$ | B. $-\frac{4}{5}$ |
| C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ | D. $-\frac{4\sqrt{5}}{5}$ |

4. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $y=1$ 与 C 在第一象限的交点为 A , 且满足 $|AF|=2$, 则 $p=$

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$
C. 1 D. 2

5. 如图甲, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $CD=2AB$, E 、 F 分别为 AD 、 CD 的中点, 以 AF 为折痕把 $\triangle ADF$ 折起, 使点 D 不落在平面 $ABCF$ 内 (如图乙), 那么在以下 4 个结论中, 正确结论的个数是

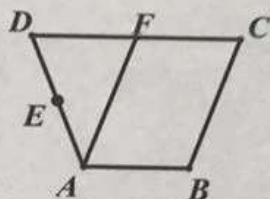
① $AF \parallel$ 平面 BCD ; ② $BE \parallel$ 平面 CDF ; ③ $CD \parallel$ 平面 BEF .

A. 0

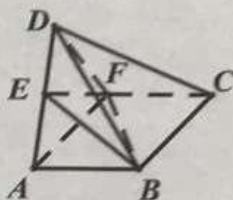
B. 1

C. 2

D. 3



图甲



图乙

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 3$, 若点 D , E 分别是斜边 BC 的三等分点, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$ 的值为

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. 4

D. 5

7. 已知圆 $x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ 被直线 $y = \sqrt{3}x$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a =$

A. $\pm \frac{2\sqrt{39}}{3}$

B. $\pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. ± 1

D. 0

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和 S_n 满足 $S_n + 1 = 2a_n$, 则 $a_3 =$

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

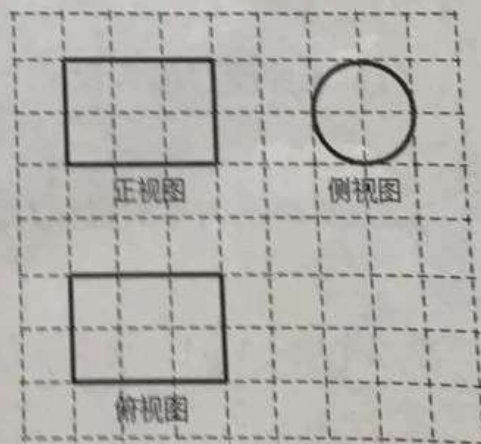
9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的外接球的体积为

A. $\frac{13\sqrt{13}}{6}\pi$

B. 13π

C. 9π

D. $\frac{9}{2}\pi$



10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 且对任意实数 x 都有 $f(x)+f(4-x)=0$, 当

$x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = -x^2 + 4$, 则 $f(11) =$

A. -117

B. 117

C. 3

D. -3

11. 水车 (如图1), 又称孔明车, 是我国最古老的农业灌溉工具, 主要利用水流的动力灌溉农作物, 是先人们在征服世界的过程中创造出来的高超劳动技艺, 是珍贵的历史文化遗产. 相传为汉灵帝时毕岚造出雏形, 经三国时孔明改造完善后在蜀国推广使用, 隋唐时广泛用于农业灌溉, 有1700余年历史. 下图2是一个水车的示意图, 它的直径为3 m, 其中心 (即圆心) O 距水面0.75 m. 如果水车每4 min 逆时针转3圈, 在水车轮边缘上取一点 P , 我们知道在水车匀速转动时, P 点距水面的高度 h (单位: m) 是一个变量, 它是时间 t (单位: s) 的函数. 为了方便, 不妨从 P 点位于水车与水面交点 Q 时开始记时 ($t=0$), 则我们可以建立函数关系式 $h(t) = A\sin(\omega t + \varphi) + k$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 来反映 h 随 t 变化的周期规律.

下面关于函数 $h(t)$ 的描述, 正确的是

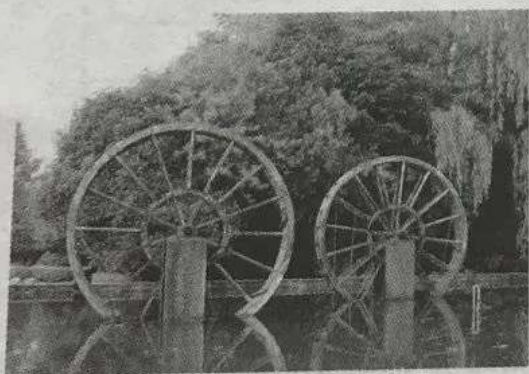


图1

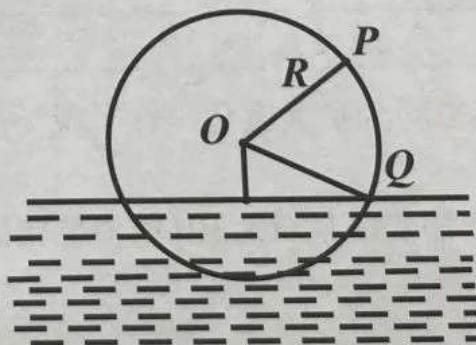


图2

- A. 最小正周期为 80π
- B. 一个单调递减区间为 $[30, 70]$
- C. $y = |h(t)|$ 的最小正周期为 40
- D. 图像的一条对称轴方程为 $t = -\frac{40}{3}$

12. “群”是代数学中一个重要的概念，它的定义是：设 G 为某种元素组成的一个非空集合，若在 G 内定义一个运算“ $*$ ”，满足以下条件：

① $\forall a, b \in G$ ，有 $a*b \in G$ ；

② $\forall a, b, c \in G$ ，有 $(a*b)*c = a*(b*c)$ ；

③在 G 中有一个元素 e ，对 $\forall a \in G$ ，都有 $a*e = e*a = a$ ，称 e 为 G 的单位元；

④ $\forall a \in G$ ，在 G 中存在唯一确定的 b ，使 $a*b = b*a = e$ ，称 b 为 a 的逆元。

此时称 $(G, *)$ 为一个群。

例如实数集 $\mathbb{R}$ 和实数集上的加法运算“ $+$ ”就构成一个群 $(\mathbb{R}, +)$ ，其单位元是 0 ，每一个数的逆元是其相反数，那么下列说法中，错误的是

A. $G = \mathbb{Q}$ ，则 $(G, +)$ 为一个群

B. $G = \mathbb{R}$ ，则 $(G, \times)$ 为一个群

C. $G = \{-1, 1\}$ ，则 $(G, \times)$ 为一个群

D. $G = \{\text{平面向量}\}$ ，则 $(G, +)$ 为一个群

第II卷(非选择题 共 90 分)

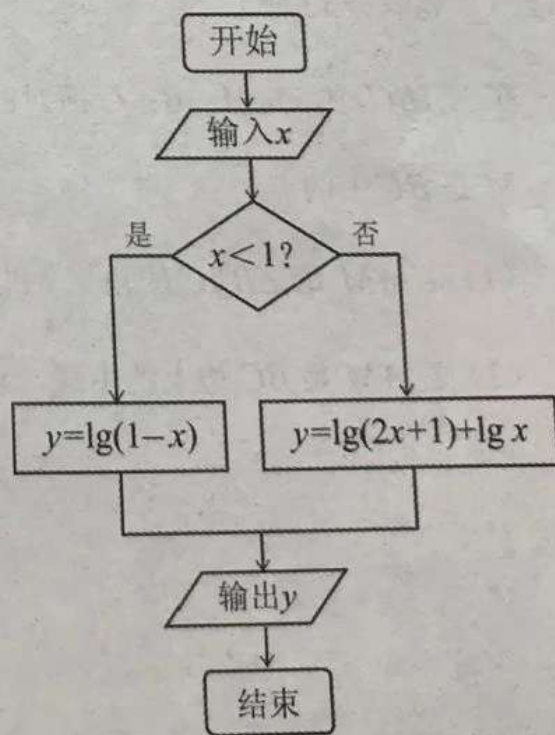
本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题~第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22、23、24 题为选考题，考生根据要求作答。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

13. 如右图所示的算法程序框图中，如果输入 x 的值为 2，那么输出的结果为_____。

14. 2019 年中共中央、国务院印发了《关于深化教育教学改革全面提高义务教育质量的意见》，

《意见》提出坚持“五育并举”，全面发展素质教育。为了落实相关精神，某校举办了科技、艺术、劳动、美食文化周活动，在本次活动中小明准备从水火箭、机甲大师、绘画展、茶叶采摘、茶叶杀青、自助烧烤 6 个项目中随机选择 2 个项目参加，那么小明的选择中没有“茶叶采摘”这一项目的概率是_____。



15.著名的古希腊数学家阿基米德曾发现的一个事实：在一个大的半圆中有两个互切的内切半圆，于是在大的半圆内形成一个由圆弧围成的曲边三角形（如图1）。同时这两个内切半圆的公切线又把这区域分隔成两块，阿基米德发现这两块的内切圆竟然也是同样大小的！他称此为“皮匠刀定理”，因为这个曲边三角形很像当时皮匠用来切割皮料的刀子，我们也可以把这个曲边三角形叫做皮匠刀形。在图2中，现向最大半圆内投点，记该点落在皮匠刀形（阴影）内的概率为 P ，则 P 的最大值为_____。

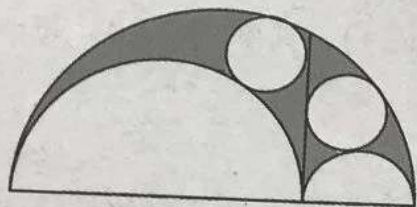


图1

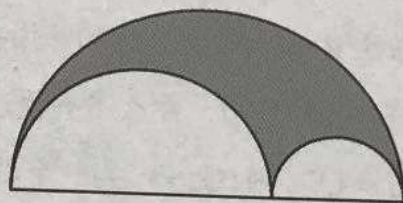


图2

16.函数 $y = x^2$ 在点 (n, n^2) ($n \in N_+$)处的切线记为 l_n ，直线 l_n ， l_{n+1} 及 x 轴围成的三角形的面积记为 S_n ，则 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \dots + \frac{1}{S_n} =$ _____。

三、解答题：第17至21题每题12分，第22、23、24题为选考题，各10分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本题满分12分）

在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ， $a = \sqrt{5}$ ， $b = 1$ ， $c = \sqrt{2}$ ，点 M 是 BC 上的点。

(1) 若 AM 是 $\angle BAC$ 的角平分线，求 $\frac{BM}{CM}$ 的值；

(2) 若 AM 是 BC 边上的中线，求 AM 的长。

18. (本小题满分 12 分)

2021 中国国际大数据产业博览会于 5 月 26 日在“中国数谷”贵阳开幕, 本届数博会的大会主题是“数据创造价值, 创新驱动未来”, 本年度主题是“数智变, 物致新”, 大会采取线上线下相融的办会模式. 博览会期间, 某机构为了解贵阳市市民线上线下的观看方式是否与年龄有关, 研究了年龄在 $(15, 50]$ 周岁范围内的市民的观看方式, 并从这个年龄范围内的线上和线下观看的市民中各随机抽取了 100 人进一步研究, 将抽取的 200 人的数据整理后得到如下表:

年龄段 (周岁)	线上观看市民人数	线下观看市民人数
$(15, 20]$	8	14
$(20, 25]$	13	24
$(25, 30]$	19	22
$(30, 35]$	25	18
$(35, 40]$	16	11
$(40, 45]$	11	8
$(45, 50]$	8	3

(1) 根据表格中的数据完成下面的 2×2 列联表, 并判断是否有 99% 的把握认为市民线上线下的观看方式与年龄段有关?

	线上观看市民	线下观看市民	总计
年龄在 $(15, 30]$			
年龄在 $(30, 50]$			
总计			

(2) 某公司为扩大宣传举行了现场抽奖活动, $(15, 50]$ 周岁范围内线下观看的市民可参与现场抽奖, 且 $(15, 30]$ 周岁范围的市民只抽一次, $(30, 50]$ 周岁范围的市民可抽两次, 已知在一次抽奖中, 抽中 45 元优惠券的概率为 $\frac{2}{3}$, 抽中 90 元优惠券的概率为 $\frac{1}{3}$.

X 表示某市民抽中的优惠券金额 (单位: 元), 将表中数据得到的频率视为概率, 求 X 的分布列和数学期望.

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

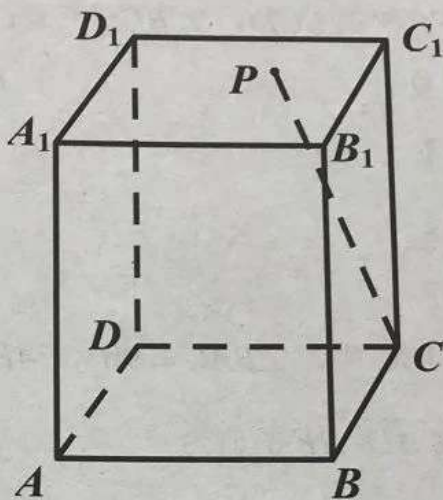
$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19. (本小题满分 12 分)

长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=AD=1$, $AA_1=2$, P 是上底面内的一点, 经过点 P 在上底面内的一条直线 l 满足 $l \perp PC$.

(1) 作出直线 l , 说明作法 (不必说明理由);

(2) 当 P 是 A_1C_1 中点时, 求二面角 $A-l-C$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (a+1)\ln x + x - \frac{a}{x}$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调区间并求其最值;

(2) 当 $a < 0$ 时, 记 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$, 求证: 存在 $a_0 < 0$, 使得 $g(a_0) > 2$.

21. (本小题满分 12 分)

已知 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ 皆为曲线 C 上的点, P 为曲线 C 上异于 A , B 的任意一点, 且满足直线 PA 的斜率和直线 PB 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 斜率不为零的直线 l 过点 $F(2\sqrt{3}, 0)$ 且与曲线 C 交于 M, N 两点, 点 $Q(0, \frac{3\sqrt{3}}{2})$,

若 $|MQ| = |NQ|$, 求直线 l 的方程.

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答, (建议未学过选修 4-4、4-5 的同学才选做此题) 如果多做, 则按所做的第一题记分。作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应题号的方框涂黑。

22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程 (本题满分 10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 6 + 3\cos\alpha \\ y = 3\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数), 点 P

是曲线 C_1 上任意一点, 动点 M 满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP}$, 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 记动点 M 的轨迹为 C_2 , 求 C_2 的极坐标方程;

(2) 已知直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_2 交于 A, B 两点, 若 $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$, 求 k 的值。

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - 2|$ 。

(1) 求不等式 $f(x) \geq 5 - 2|x - 1|$ 的解集;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + |x - 6|$ 的最小值为 m , 正实数 a, b 满足 $a + b = m$,

求证: $\frac{4}{a} + \frac{16}{b} \geq 9$ 。

24. (本小题满分 10 分) (还未学过选修 4-4、4-5 的同学可选做此题)

等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 且 $a_1 + a_3 = 10, 4a_3^2 = a_2 \cdot a_6$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{n \cdot a_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

贵阳市 2022 届高三年级摸底考试

理科数学参考答案及评分建议

2021 年 8 月

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	D	C	C	B	C	A	D	D	B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 1; 14. $\frac{2}{3}$; 15. $\frac{1}{2}$; 16. $\frac{4n}{n+1}$.

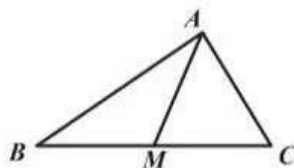
三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.解：(1) 在 $\triangle ABM$ 中，由正弦定理得 $\frac{BM}{\sin \angle BAM} = \frac{c}{\sin \angle AMB}$,

在 $\triangle ACM$ 中，由正弦定理得 $\frac{CM}{\sin \angle CAM} = \frac{b}{\sin \angle AMC}$,

由条件知， $\angle BAM = \angle CAM$ ， $\sin \angle AMB = \sin \angle AMC$,

所以 $\frac{BM}{CM} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$.



.....6 分

(2) 因为 $\cos \angle AMB = -\cos \angle AMC$ ，所以由余弦定理得

$$\frac{AM^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - b^2}{2AM \cdot \frac{1}{2}a} = -\frac{AM^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - c^2}{2AM \cdot \frac{1}{2}a}$$

所以， $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2}$.

.....12 分

18.解：(1) 根据所给数据，可得 2×2 列联表：

	线上观看市民	线下观看市民	总计
年龄在 (15, 30]	40	60	100
年龄在 (30, 50]	60	40	100
总计	100	100	200

$$K^2 = \frac{200 \times (40 \times 40 - 60 \times 60)^2}{100 \times 100 \times 100 \times 100} = 8$$

由于 $8 > 6.635$ ，故有 99% 的把握认为市民线上线下的观看方式与年龄段有关。

.....6 分

(2) 由题意知， X 可能的取值为 45、90、135、180，且线下观看的 $(15, 30]$ 周岁范围内的市民占 $\frac{3}{5}$ ， $(30, 50]$ 周岁范围的市民占 $\frac{2}{5}$ ，所以

$$P(X=45) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=90) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{17}{45}$$

$$P(X=135) = \frac{2}{5} \times C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{45}$$

$$P(X=180) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{45}$$

所以 X 的分布列为：

X	45	90	135	180
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{17}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{2}{45}$

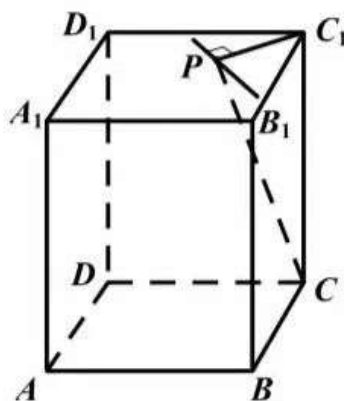
所以 X 的数学期望为：

$$E(X) = 45 \times \frac{2}{5} + 90 \times \frac{17}{45} + 135 \times \frac{8}{45} + 180 \times \frac{2}{45} = 84.$$

.....12 分

19. 解：(1) 如图，连接 PC_1 ，

在上底面过点 P 作直线 $l \perp PC_1$ ；



.....6 分

(2) 以点 D 为坐标原点，以向量 $\overrightarrow{DA}$ 方向为 x 轴的正方向建立如图所示的坐标系，当 P 是 A_1C_1 中点时，直线 l 即为直线 B_1D_1 ，由条件知， $D_1(0,0,2)$ ， $B_1(1,1,2)$ ，

$A(1,0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ，

则 $\overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 2)$ ， $\overrightarrow{AB_1} = (0, 1, 2)$ ，

$\overrightarrow{CD_1} = (0, -1, 2)$ ， $\overrightarrow{CB_1} = (1, 0, 2)$ ，

设平面 AB_1D_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ，

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{AD_1} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ \overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases},$$

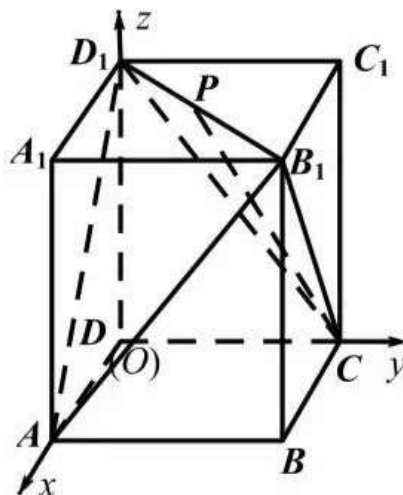
取 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$

设平面 CB_1D_1 的法向量为 $\mathbf{m}$, 则

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{CD_1} \cdot \mathbf{m} = 0 \\ \overrightarrow{CB_1} \cdot \mathbf{m} = 0 \end{cases} \quad \text{同理可取} \mathbf{m} = (-2, 2, 1)$$

$$\text{因为} \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{-7}{3 \times 3} = -\frac{7}{9}$$

所以二面角 $A-l-C$ 的余弦值为 $\frac{7}{9}$.



.....12 分

20.解 (1) $\because f(x) = (a+1)\ln x + x - \frac{a}{x}, (x > 0)$

$$f'(x) = \frac{a+1}{x} + 1 + \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x^2}$$

①当 $a \geq 0$ 时

$f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$f(x)$ 在定义域内无最值;

②当 $a < 0$ 时

令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -1$ (舍) 或则 $x = -a$;

令 $f'(x) \geq 0$, 可得 $x \geq -a$

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0, -a)$ 单调递减, 在区间 $(-a, +\infty)$ 单调递增,

$f(x)_{\min} = f(-a) = (a+1)\ln(-a) - a + 1$, $f(x)$ 无最大值;

综上①②可知

1°当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 无最值;

2°当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, -a)$ 单调递减, 在区间 $(-a, +\infty)$ 单调递增,

$f(x)_{\min} = f(-a) = (a+1)\ln(-a) - a + 1$, $f(x)$ 无最大值.

.....6 分

(2) 证明: 由 (1) 知, 当 $a < 0$ 时

$$f(x)_{\min} = f(-a) = (a+1)\ln(-a) - a + 1,$$

$$\therefore g(a) = (a+1)\ln(-a) - a + 1, \quad a < 0,$$

$$g'(a) = \ln(-a) + \frac{a+1}{a} - 1 = \ln(-a) + \frac{1}{a},$$

$$\therefore g''(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = \frac{a-1}{a^2} < 0,$$

$$\therefore g'(a) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 单调递减, 又 } g'(-e) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \quad g'(-1) = -1 < 0,$$

所以存在 $a_0 \in (-e, -1)$, 使 $g'(a_0) = 0$

$$\text{即 } \ln(-a_0) + \frac{1}{a_0} = 0, \quad \ln(-a_0) = -\frac{1}{a_0},$$

此时当 $a \in (-\infty, a_0)$, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 在 $(-\infty, a_0)$ 单调递增,

当 $a \in (a_0, 0)$, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 在 $(a_0, 0)$ 单调递减;

$$\text{所以 } g(a)_{\max} = g(a_0) = (a_0+1)\ln(-a_0) - a_0 + 1, \text{ 又 } \ln(-a_0) = -\frac{1}{a_0}$$

$$\text{所以 } g(a)_{\max} = g(a_0) = (a_0+1)\left(-\frac{1}{a_0}\right) - a_0 + 1 = -\frac{1}{a_0} - a_0 > 2\sqrt{\left(-\frac{1}{a_0}\right) \cdot (-a_0)} = 2$$

所以存在 $a_0 < 0$, 使得 $g(a_0) > 2$

.....12 分

21. 解 (1) 设 $P(x, y)$ 为曲线 C 上异于 A, B 的任意一点;

$$\because k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{y}{x+4} \times \frac{y}{x-4} = -\frac{1}{4}, \quad (x \neq \pm 4)$$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2-16} = -\frac{1}{4}, \quad (x \neq \pm 4) \Rightarrow x^2 - 16 = -4y^2, \quad (x \neq \pm 4) \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad (x \neq \pm 4)$$

又 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ 皆为曲线 C 上的点, 所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$;

.....6 分

(2) 设直线 l 的斜率为 $k(k \neq 0)$, 则 l 的方程为: $y = k(x - 2\sqrt{3})$,

又设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x - 2\sqrt{3}) \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 - 16\sqrt{3}k^2x + 48k^2 - 16 = 0,$$

$$\Delta > 0,$$

$$\text{由韦达定理得 } x_1 + x_2 = \frac{16\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}, \quad x_1x_2 = \frac{48k^2 - 16}{4k^2 + 1}$$

$$\text{此时线段 } MN \text{ 的中点为 } \left(\frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}, \frac{-2\sqrt{3}k}{4k^2 + 1} \right)$$

若 $|MQ| = |NQ|$, 则 Q 在 MN 的中垂线上, Q 与 MN 中点的连线与 MN 垂直

$$\therefore \frac{-\frac{2\sqrt{3}k}{4k^2 + 1} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{8\sqrt{3}k^2}{4k^2 + 1}} = -\frac{1}{k} \quad \text{化简得 } 4k^2 - 4k + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } k = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{3}), \text{ 即 } x - 2y - 2\sqrt{3} = 0.$$

.....12 分

22.解: (1) 设 $M(x, y)$, $P(6 + 3\cos \alpha, 3\sin \alpha)$

$$\because \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MP}$$

$$\therefore (x, y) = \frac{1}{2}(6 + 3\cos \alpha - x, 3\sin \alpha - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}\cos \alpha - \frac{1}{2}x \\ y = \frac{3}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$

$$\therefore C_2 \text{ 的普通方程为 } (x - 2)^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\because x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \therefore \rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\therefore C_2 \text{ 的极坐标方程为: } \rho^2 - 4\rho \cos \theta + 3 = 0;$$

.....5 分

(2) 设 $A(\rho_A, \theta)$, $B(\rho_B, \theta)$, 则 ρ_A, ρ_B 为方程 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta + 3 = 0$ 的两根,

由韦达定理

$$\rho_A + \rho_B = 4 \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\rho_A \rho_B = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow \rho_B = 2\rho_A \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{联立} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \text{ 可得 } \cos^2 \theta = \frac{27}{32},$$

$$\text{所以 } \sin^2 \theta = \frac{5}{32}, \quad \tan^2 \theta = \frac{5}{27},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的斜率 } k = \pm \frac{\sqrt{15}}{9},$$

.....10 分

23. 解: (1) 若 $f(x) \geq 5 - 2|x - 1|$

$$\text{则 } |x - 2| + 2|x - 1| \geq 5 \quad (*)$$

① 当 $x < 1$ 时

$$(*) \Leftrightarrow 2 - x + 2(1 - x) \geq 5 \Leftrightarrow -3x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$$

② 当 $1 \leq x \leq 2$ 时

$$(*) \Leftrightarrow 2 - x + 2(x - 1) \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 5$$

又 $1 \leq x \leq 2$, 所以此时无解

③ 当 $x > 2$ 时

$$(*) \Leftrightarrow x - 2 + 2(x - 1) \geq 5 \Leftrightarrow 3x - 4 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 3$$

综上①②③可知 $f(x) \geq 5 - 2|x - 1|$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$

.....5 分

$$(2) \quad g(x) = f(x) + |x - 6| = |x - 2| + |x - 6| \geq |x - 2 + 6 - x| = 4$$

当 $2 \leq x \leq 6$ 是上式“=”成立, 所以 $m = 4$

$$\therefore a + b = 4$$

$$\frac{4}{a} + \frac{16}{b} = \frac{1}{4}(a + b)\left(\frac{4}{a} + \frac{16}{b}\right) = \frac{1}{4}\left(20 + \frac{4b}{a} + \frac{16a}{b}\right)$$

$$\geq \frac{1}{4}(20+2\sqrt{\frac{4b}{a} \times \frac{16a}{b}}) = \frac{1}{4}(20+16)=9$$

上式“=”当且仅当 $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{8}{3}$ 时成立.

所以 $\frac{4}{a} + \frac{16}{b} \geq 9$.

.....10 分

24.解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 由 $4a_3^2 = a_2 \cdot a_6 = a_4^2$ 得: $q^2 = 4$, 所以 $q = 2$.

由 $a_1 + a_3 = a_1 + 4a_1 = 5a_1 = 10$, 得到 $a_1 = 2$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

.....5 分

(2) 由条件知,

$$T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$$

$$\text{又 } 2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + n \times 2^{n+1}$$

将以上两式相减得

$$-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1} = 2(2^n - 1) - n \times 2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$$

$$\text{所以 } T_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

.....10 分