

贵阳市 2022 届高三年级摸底考试

文科数学参考答案及评分建议

2021 年 8 月

一、选择题： 本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	D	C	C	B	C	A	D	D	B

二、填空题： 本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 1; 14. $\frac{2}{3}$; 15. $\frac{7}{25}$; 16. 4.

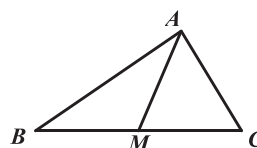
三、解答题： 本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.解：（1）在 $\triangle ABM$ 中，由正弦定理得 $\frac{BM}{\sin \angle BAM} = \frac{c}{\sin \angle AMB}$ ，

在 $\triangle ACM$ 中，由正弦定理得 $\frac{CM}{\sin \angle CAM} = \frac{b}{\sin \angle AMC}$ ，

由条件知， $\angle BAM = \angle CAM$ ， $\sin \angle AMB = \sin \angle AMC$ ，

所以 $\frac{BM}{CM} = \frac{c}{b} = \sqrt{2}$.



.....6 分

（2）因为 $\cos \angle AMB = -\cos \angle AMC$ ，所以由余弦定理得

$$\frac{AM^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - b^2}{2AM \cdot \frac{1}{2}a} = -\frac{AM^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - c^2}{2AM \cdot \frac{1}{2}a}$$

所以， $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} = \frac{1}{2}$.

.....12 分

18.解：（1）根据表格中的数据，可估计线上观看的市民年龄的中位数为：

$$30 + \frac{0.5 - (0.08 + 0.13 + 0.19)}{0.05} = 32$$

.....6 分

（2）根据所给数据，可得 2×2 列联表：

	线上观看市民	线下观看市民	总计
年龄在 (15, 30]	40	60	100
年龄在 (30, 50]	60	40	100
总计	100	100	200

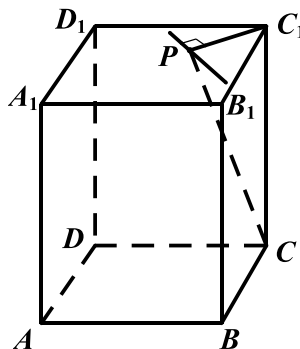
$$K^2 = \frac{200 \times (40 \times 40 - 60 \times 60)^2}{100 \times 100 \times 100 \times 100} = 8$$

由于 $8 > 6.635$ ，故有 99% 的把握认为市民线上线下的观看方式与年龄段有关。

.....12 分

19.解：（1）如图，连接 PC_1 ，

在上底面过点 P 作直线 $l \perp PC_1$ ；



.....6 分

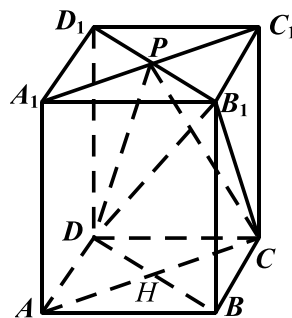
（2）连接 A_1C_1 ， B_1D_1 ， AC ， BD ，若 AC 交 BD 于点 H ，则 $CH \perp BD$ ， $CH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

在该长方体中有 $DD_1 \perp$ 底面 $ABCD$ ，可得到 $DD_1 \perp CH$ ，

又 $BD \cap DD_1 = D$ ，则 $CH \perp$ 平面 BB_1D_1D

即 CH 是三棱锥 $C-PB_1D$ 的高，所以

$$V_{P-B_1CD} = V_{C-PDB_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}$$



.....12 分

20.解：（1）因为 $a = -2$ ，所以 $f(x) = -\ln x + x + \frac{2}{x}$ ，

则函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，

$$\text{而 } f'(x) = -\frac{1}{x} + 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2},$$

因为 $x > 0$ ，令 $f'(x) > 0$ ，解得 $x > 2$ ；令 $f'(x) < 0$ ，解得 $0 < x < 2$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 单调递减，在区间 $(2, +\infty)$ 单调递增，

故函数 $f(x)$ 有极小值为 $f(2) = 3 - \ln 2$ ，无极大值；

.....6 分

(2) 因为 $f(x) = (a+1)\ln x + x - \frac{a}{x}$, ($x > 0$),

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{a+1}{x} + 1 + \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x^2} = \frac{(x+1)(x+a)}{x^2},$$

因为 $a < -1$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -1$ (舍) 或 $x = -a$,

令 $f'(x) \geq 0$, 得 $x \geq -a$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < -a$,

故 $f(x)$ 在区间 $(0, -a)$ 单调递减, 在区间 $(-a, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-a) = (a+1)\ln(-a) - a + 1$, $a < -1$,

若对任意 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) > -a^2 - 3a$,

只需证 $\therefore f(x)_{\min} = f(-a) = (a+1)\ln(-a) - a + 1 > -a^2 - 3a$, ($a < -1$),

即证 $(a+1)\ln(-a) + a^2 + 2a + 1 > 0$, ($a < -1$),

$\Leftrightarrow \ln(-a) + a + 1 < 0$, ($a < -1$),

令 $h(x) = \ln(-x) + x + 1$, ($x < -1$),

只需证 $h(x) < 0$

$h'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递增,

$\therefore h(x) < h(-1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$,

$\therefore$ 对任意 $x \in (1, +\infty)$, 都有 $f(x) > -a^2 - 3a$, ($a < -1$).

.....12 分

21. 解 (1) 设 $P(x, y)$ 为曲线 C 上异于 A, B 的任意一点;

$$\because k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{y}{x+4} \times \frac{y}{x-4} = -\frac{1}{4}, \quad (x \neq \pm 4)$$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2 - 16} = -\frac{1}{4}, \quad (x \neq \pm 4) \Rightarrow x^2 - 16 = -4y^2, \quad (x \neq \pm 4) \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad (x \neq \pm 4)$$

又 $A(-4, 0)$, $B(4, 0)$ 皆为曲线 C 上的点, 所以曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$;

.....6 分

(2) 设 l 的方程为: $x = my + 6$,

又设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 6 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{消去 } x \text{ 得, } (m^2 + 4)y^2 + 12my + 20 = 0,$$

$$\Delta = (12m)^2 - 80(m^2 + 4) = 64m^2 - 320,$$

$$\Delta > 0, \text{ 则 } 64m^2 - 320 > 0 \Rightarrow m^2 > 5,$$

由韦达定理

$$y_1 + y_2 = -\frac{12m}{m^2 + 4}, \quad y_1 y_2 = \frac{20}{m^2 + 4},$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot |OD| \cdot |y_1 - y_2| = 3|y_1 - y_2|$$

$$= 3\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 3\sqrt{\frac{144m^2}{(m^2 + 4)^2} - \frac{80}{m^2 + 4}} = \frac{24\sqrt{m^2 - 5}}{m^2 + 4},$$

$$\text{令 } \sqrt{m^2 - 5} = t, \text{ 则 } t > 0, \text{ 且 } m^2 + 4 = t^2 + 9,$$

$$\therefore S_{\triangle OMN} = \frac{24t}{t^2 + 9} = \frac{24}{t + \frac{9}{t}} \leq 4,$$

当且仅当 $t = 3$, 即 $m = \pm\sqrt{14}$ 时“=”成立,

所以 $\triangle OMN$ 面积的最大值为 4.

.....12 分

22.解: (1) 设 $M(x, y)$, $P(6 + 3\cos \alpha, 3\sin \alpha)$

$$\therefore \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MP}$$

$$\therefore (x, y) = \frac{1}{2}(6 + 3\cos \alpha - x, 3\sin \alpha - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}\cos \alpha - \frac{1}{2}x \\ y = \frac{3}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数})$$

$$\therefore C_2 \text{ 的普通方程为 } (x - 2)^2 + y^2 = 1,$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$\because x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \therefore \rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\therefore C_2 \text{ 的极坐标方程为: } \rho^2 - 4\rho \cos \theta + 3 = 0;$$

.....5 分

(2) 设 $A(\rho_A, \theta)$, $B(\rho_B, \theta)$, 则 ρ_A, ρ_B 为方程 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta + 3 = 0$ 的两根,

由韦达定理

$$\rho_A + \rho_B = 4 \cos \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\rho_A \rho_B = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow \rho_B = 2\rho_A \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{联立} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \text{ 可得 } \cos^2 \theta = \frac{27}{32},$$

$$\text{所以 } \sin^2 \theta = \frac{5}{32}, \quad \tan^2 \theta = \frac{5}{27},$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的斜率 } k = \pm \frac{\sqrt{15}}{9},$$

.....10 分

23. 解: (1) 若 $f(x) \geq 5 - 2|x - 1|$

$$\text{则 } |x - 2| + 2|x - 1| \geq 5 \quad (\ast)$$

① 当 $x < 1$ 时

$$(\ast) \Leftrightarrow 2 - x + 2(1 - x) \geq 5 \Leftrightarrow -3x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{3}$$

② 当 $1 \leq x \leq 2$ 时

$$(\ast) \Leftrightarrow 2 - x + 2(x - 1) \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 5$$

又 $1 \leq x \leq 2$, 所以此时无解

③ 当 $x > 2$ 时

$$(\ast) \Leftrightarrow x - 2 + 2(x - 1) \geq 5 \Leftrightarrow 3x - 4 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 3$$

综上①②③可知 $f(x) \geq 5 - 2|x - 1|$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$

.....5 分

$$(2) \quad g(x) = f(x) + |x - 6| = |x - 2| + |x - 6| \geq |x - 2 + 6 - x| = 4$$

当 $2 \leq x \leq 6$ 是上式“=”成立, 所以 $m = 4$

$$\therefore a + b = 4$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{a} + \frac{16}{b} &= \frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{4}{a} + \frac{16}{b}\right) = \frac{1}{4}\left(20 + \frac{4b}{a} + \frac{16a}{b}\right) \\ &\geq \frac{1}{4}\left(20 + 2\sqrt{\frac{4b}{a} \times \frac{16a}{b}}\right) = \frac{1}{4}(20 + 16) = 9\end{aligned}$$

上式“=”当且仅当 $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{8}{3}$ 时成立.

所以 $\frac{4}{a} + \frac{16}{b} \geq 9$.

.....10 分