

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 已知函数 $f(x) = 1 + \tan^{2n} x - \frac{1}{500 \cos^{2n} x}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 有零点, 则 n 的最小值为 _____.

14. 已知 $a > 1$, 若对于任意的 $x \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$, 不等式 $4x - \ln(3x) \leq a e^x - \ln a$ 恒成立, 则 a 的最小值为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = e^x$, 若关于 x 的不等式 $f(x) < m g(x)$ 的解集中恰好有一个整数, 则实数 m 的取值范围是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$, 下列命题:

① $f(x)$ 在其定义域内有且仅有一个零点;

② $f(x)$ 在其定义域内有 2 个极值点;

③ $\exists x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 使 $f(x_1) = f(x_2)$;

④ 当 $x > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象总在函数 $y = 1 - \frac{2}{x}$ 的图象的下方.

其中真命题有 _____. (写出所有真命题的序号)

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax}{\ln x}$ ($a > 0$).

(1) 当函数 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处的切线斜率为 -2 时, 求 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 当 $x > 1$ 时, $f(x) \geq \frac{x}{e^x} \cdot \frac{\ln \frac{x}{a}}{\ln x}$, 求 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax + \ln x$ ($a \in \mathbf{R}$).

(1) 若 $a = 3$, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 令 $g(x) = f(x) - x^2 + \frac{1}{2}ax$, 若 $g(x)$ 的最大值为 -1 , 求 a 的值.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = a \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若方程 $2f(x) - \ln x + x + 2 = 0$ 有三个实数根, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - 2ax - 1$, $g(x) = 2a \ln(x+1)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 求 a 的值;

(2) 求 $f(x)$ 的单调区间.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = x e^x - a(\ln x + x)$.

(1) 当 $a > 0$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值.

(2) 若对任意 $x > 0$, 不等式 $f(x) \geq 1$ 恒成立.

(i) 求实数 a 的值.

(ii) 证明: $x^2 e^x > (x+2) \ln x + 2 \sin x$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - a(x-1)^2 + 1$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 极值点的个数.

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_2 > x_1 > 0$, 证明: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 1$.