

15. 函数 $f(x) = a^{x-1} - 2$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 A , 若点 A 在直线 $mx - ny - 1 = 0$ 上, 其中 $m > 0, n > 0$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 _____.

16. 已知函数 $f(x)$ 为偶函数, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = -2^x + 1$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) =$ _____; 如果实数 t 满足 $f(\ln t) + f\left(\ln \frac{1}{t}\right) > 2f(1)$, 那么 t 的取值范围为 _____.(本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)

记函数 $f(x) = \sqrt{1-2^x}$ 的定义域为集合 A , 函数 $g(x) = \lg[(x-a-1)(x-a+1)]$ 的定义域为集合 B .

(1) 求集合 B ;

(2) 若 $A \cap B = A$, 求实数 a 的取值范围.

18. (12 分)

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x^2 + ax + 3 - 2a$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数, 求实数 a 的取值范围.

19. (12 分)

已知函数 $f(x) = \log_a(x-2a) + \log_a(4a-x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 当 $a > 1$ 时, 写出 $f(x)$ 的单调区间, 并用定义法证明;

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, 若 $f(x) \geq \log_a\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{8}\right)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分)

某地为践行绿水青山就是金山银山的理念, 大力开展植树造林. 假设一片森林原来的面积为 a 亩, 计划每年种植一些树苗, 且森林面积的年增长率相同, 当面积是原来的 2 倍时, 所用时间是 10 年.

(1) 求森林面积的年增长率.

(2) 到今年为止, 森林面积为原来的 $\sqrt{2}$ 倍, 则该地已经植树造林多少年?

(3) 为使森林面积至少达到 $6a$ 亩, 至少需要植树造林多少年(精确到整数)?

参考数据: $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.4771$.

21. (12 分)

设函数 $f(x) = \log_a(1+x) + \log_a(3-x)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域.

(2) 若 $f(1) = 2$, 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ 上的最大值.

(3) 解关于 x 的不等式: $\log_a(1+x) > \log_a(3-x)$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \log_m\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) + 1$ ($m > 0, m \neq 1$) 的图象恒经过与 m 无关的定点 A .

(1) 求点 A 的坐标;

(2) 若偶函数 $g(x) = ax^2 + bx - c$, $x \in [1-2c, c]$ 的图象过点 A , 求 a, b, c 的值;

(3) 在(2)的条件下, 若对任意的 $x_1 \in [1, 2]$, 总存在 $x_2 \in [2, 4]$, 使 $g(x_1) \geq f(x_2) - 1$ 成立, 求 m 的取值范围.