

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+2) = -f(x)$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则 $f(\log_2 41) =$

- A. 40 B. $\frac{25}{16}$ C. $\frac{23}{41}$ D. $\frac{41}{23}$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + 3a, & x \leq 1, \\ 2x + \frac{2}{x-1} + 3, & x > 1. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$, 则 a 的值为

- A. 0 B. 1 或 4 C. 1 D. 4

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+1), & x \geq 1, \\ 1, & x < 1, \end{cases}$ 则满足 $f(2x+1) < f(3x-1)$ 的实数 x 的取值范围是

- A. $(\frac{2}{3}, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(\frac{2}{3}, 2)$ D. $(1, 2)$

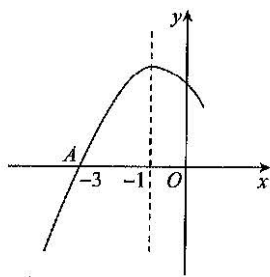
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2-a)x - 4a, & x < 1, \\ ax, & x \geq 1. \end{cases}$ 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-1, 0)$ B. $(-1, 2)$ C. $(0, \frac{1}{3})$ D. $[\frac{1}{3}, 2)$

5. 已知定义在区间 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列两个条件: ① 对于任意的 $x \in [-1, 1]$, 都有 $f(-x) = -f(x)$; ② 对于任意的 $m, n \in [0, 1]$, 当 $m \neq n$ 时, 都有 $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} < 0$. 则不等式 $f(1-2x) + f(1-x) < 0$ 的解集是

- A. $[0, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ C. $[-1, \frac{1}{2})$ D. $[0, \frac{2}{3})$

6. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的一部分如图所示, 图象过点 $A(-3, 0)$, 对称轴方程为 $x = -1$, 给出下面四个结论:



① $b^2 > 4ac$; ② $2a - b = 1$; ③ $a - b + c = 0$; ④ 若 $y > 0$, 则 $x \in (-3, 1)$.

其中正确的是

- A. ①④ B. ②④ C. ①③ D. ①②③

7. 高斯是德国著名的数学家, 用其名字命名的“高斯函数”: 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为高斯函数, 例如: $[-0.5] = -1, [1.5] = 1$. 已知函数 $f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \times 2^x + 4 (0 < x < 2)$, 则函数 $y = [f(x)]$ 的值域为

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

8. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-2, 2]$ 上的奇函数, 当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 函数 $g(x) = x^2 - 2x - m$. 如果对于任意 $x_1 \in [-2, 2]$, 存在 $x_2 \in [-2, 2]$, 使得 $g(x_2) = f(x_1)$, 则实数 m 的取值范围是

- A. $[2, 5]$ B. $[-5, -2]$ C. $[2, 3]$ D. $[-5, -3]$

二、选择题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多个选项是符合题目要求的。全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的得 0 分)

9. 下列结论正确的是

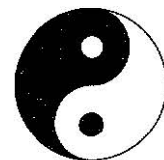
A. 若函数 $f(2^x)$ 的定义域是 $[1, 2]$, 则函数 $f(\log_2 x)$ 的定义域为 $[4, 16]$

B. 函数 $y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$ 是偶函数, 但不是奇函数

C. 函数 $f(x+1)$ 的定义域是 $[-1, 3]$, 则 $f(x^2)$ 的定义域是 $[0, 2]$

D. 一条曲线 $y = |3 - x^2|$ 和直线 $y = a (a \in \mathbf{R})$ 的公共点个数是 m , 则 m 的值不可能是 1

10. 如图, 太极图展现了一种相互转化, 相对统一的和谐美. 如果定义: 能够将圆 O 的周长和面积同时等分成两个部分的函数称为圆 O 的一个“太极函数”, 设圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 则下列说法中正确的是



A. 函数 $y = x^3$ 是圆 O 的一个太极函数

B. 函数 $y = \sin x$ 是圆 O 的一个太极函数

C. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 为圆 O 的太极函数

D. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f(x)$ 不能为圆 O 的太极函数

11. 若关于 x 的一元二次方程 $(x-2)(x-3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则下列结论中正确的是

A. 当 $m = 0$ 时, $x_1 = 2, x_2 = 3$

B. $m > -\frac{1}{4}$

C. 当 $m > 0$ 时, $2 < x_1 < x_2 < 3$

D. 当 $m > 0$ 时, $x_1 < 2 < 3 < x_2$

12. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + a$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 上有最小值, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上一定

A. 是奇函数

B. 是增函数

C. 无最值

D. 有最大值

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

13. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2+ax+1}}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称, 且满足 $f(x+1)+f(3-x)=0$, 且当 $x \in (2, 4)$ 时, $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + m$, 若 $f(2021) = 2 + f(-1)$, 则 $m =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 若 $f(\log_2 b) = \frac{5}{2}$, 则 $f(\log_b \frac{1}{2}) =$ _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2^{1-x}, & x \leq 1, \\ |x-2| - 1, & x > 1, \end{cases}$ 则不等式 $f(x-1) + f(x) < 0$ 的解集为 _____.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)

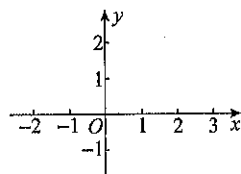
已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{1+x}{1-x}$.

- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明;
- (2) 解不等式 $f(2^x) > 2$.

18. (12 分)

已知函数 $f(x) = |x^2 - ax|$, 其中 a 为实数.

- (1) 当 $a=2$ 时, 画出函数 $f(x)$ 的图象, 并直接写出单调递增区间;
- (2) 若 $f(x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 时的取值范围为 $[0, f(3)]$, 求 a 的取值范围.



19. (12 分)

设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$) 满足下列条件: ① 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) \geq x$, 且 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x = -1$; ② 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$; ③ $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 若 $m > 1$, 存在 $t \in \mathbf{R}$, 任意 $x \in [1, m]$ 时, $f(x+t) \leq x$ 恒成立, 求 m 的最大值.

20. (12 分)

设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 且对任意的正实数 x, y 都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 恒成立. 已知 $f(2) = 1$, 且当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$.

- (1) 求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性, 并给出证明;
- (3) 解不等式 $f(x^2) > f(8x-6) - 1$.

21. (12 分)

某商场就一新款儿童玩具进行促销活动, 活动时长是 30 天, 这 30 天内第 x ($1 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*$) 天的销售单价(单位: 元/件)为 $p(x) = \begin{cases} 50+2x, & 1 \leq x \leq 10, x \in \mathbf{N}^*, \\ 80-x, & 10 < x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$ 销售量(单位: 件)为 $q(x) = n - x$ ($1 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*$), 且第 20 天的销售额为 1 800 元(销售额 = 销售单价 $\times$ 销售量).

- (1) 求 n 的值, 并求出第 5 天的销售额;
- (2) 求这 30 天内单日销售额的最大值.

22. (12 分)

已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-3, 3]$ 上的奇函数, 当 $x \in [-3, 0]$ 时, $f(x) = \frac{1}{4^x} + \frac{a}{3^x}$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 求 $f(x)$ 在区间 $(0, 3]$ 上的解析式;
- (2) 若存在 $x \in [-2, -1]$, 使不等式 $f(x) \leq \frac{m}{2^x} - \frac{1}{3^{x-1}}$ 成立, 求实数 m 的取值范围.