

考新
版高

2021—2022 学年度高三一轮复习周测卷(十)

数学·函数的应用

(考试时间 120 分钟,总分 150 分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

- 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + \lg x$ 的零点为 a , 设 $b = 3^a$, $c = \ln a$, 则 a, b, c 的大小关系为
A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $a < c < b$ D. $b < a < c$
- 函数 $f(x) = 2^x - 3x$ 的零点所在的一个区间是
A. $(-2, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(-1, 0)$
- 函数 $y = |\log_2 x| - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的零点个数是
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 若二次函数 $y = x^2 + mx$ 的对称轴是 $x = 3$, 则关于 x 的方程 $x^2 + mx = 7$ 的解为
A. $x_1 = 0, x_2 = 6$ B. $x_1 = 1, x_2 = 7$ C. $x_1 = 1, x_2 = -7$ D. $x_1 = -1, x_2 = 7$
- “喊泉”是一种地下水的毛细现象,人们在泉口吼叫或发出其他声音时,声波传入泉洞内的储水池,进而产生“共鸣”等物理学作用,激起水波,形成涌泉,声音越大,涌起的泉水越高。已知听到的声强 m 与标准声调 m_0 (m_0 约为 10^{-12} , 单位: W/m^2) 之比的常用对数称作声强的声强级,记作 L (贝尔),即 $L = \lg \frac{m}{m_0}$, 取贝尔的 10 倍作为响度的常用单位,简称为分贝。已知某处“喊泉”的声音响度 y (单位: dB) 与喷出的泉水高度 x m 满足关系式 $y = 2x$ 。现知 A 同学大喝一声激起的涌泉最高高度为 50 m, 若 A 同学大喝一声的声强大约相当于 10 个 B 同学同时大喝一声的声强, 则 B 同学大喝一声激起的涌泉最高高度约为 () m。
A. 5 B. 10 C. 45 D. 48
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0, \\ \log_2 x, & x > 0, \end{cases}$ 函数 $g(x) = f(x) + x + m$ 。若 $g(x)$ 有两个零点, 则 m 的取值范围是
A. $[-1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$ C. $[0, +\infty)$ D. $[-1, 0)$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\log_2 x|, & 0 < x < 2, \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), & 2 \leq x \leq 10. \end{cases}$ 若存在实数 x_1, x_2, x_3, x_4 , 满足 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, 且 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 则 $\frac{(x_3 - 2)(x_4 - 2)}{x_1 x_2}$ 的取值范围是
A. $(0, 12)$ B. $(0, 16)$ C. $(9, 21)$ D. $(15, 25)$
- 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 定义运算“ $\otimes$ ”, $a \otimes b = \begin{cases} a, & a - b \leq 1, \\ b, & a - b > 1. \end{cases}$ 设函数 $f(x) = 2^{x+1} \otimes (2 - 4^x)$, $x \in \mathbb{R}$ 。若函数 $y = f(x) - c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点, 则实数 c 的取值范围是
A. $(0, 1)$ B. $(0, 1) \cup (1, 2)$ C. $(1, 2)$ D. $(0, 1]$

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的四个选项中,有多个选项是符合题目要求的。全部选对的得 5 分,选对但不全的得 3 分,有选错的得 0 分)

- 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 则下列说法不正确的是
A. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^2 + 2x$
B. $f(x)$ 的最小值为 -1
C. 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
D. 若方程 $f(x) = m$ 有 2 个不同的实数解, 则 $m > 0$
- 已知函数 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则下列说法正确的是
A. $f(x)$ 为奇函数
B. $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上的最大值为 $-\frac{3}{5}$
C. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
D. $g(x) = f(x) + x$ 在区间 $(-1, 0)$ 上至少有一个零点
- 在数学中,布劳威尔不动点定理可应用到有限维空间,并构成一般不动点定理的基石。它得名于荷兰数学家鲁伊兹·布劳威尔,简单的讲就是对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$, 存在一个点 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 那么我们称该函数为“不动点”函数, 则下列为“不动点”函数的是
A. $f(x) = 2^x + x$ B. $f(x) = x^2 - x - 3$
C. $f(x) = \frac{1}{x} - x$ D. $f(x) = |\log_2 x| - 1$
- 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义, 若对任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 有 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$, 则称 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有性质“P”。设 $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上具有性质“P”, 则下列说法正确的有
A. $f(x)$ 在区间 $[1, 3]$ 上的图象是连续不断的
B. 若 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得最大值 1, 则 $f(x) = 1, x \in [1, 3]$
C. $f(x^2)$ 在区间 $[1, \sqrt{3}]$ 上具有性质“P”
D. 对任意 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [1, 3]$, 有 $f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leq \frac{1}{4}[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]$

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

- 函数 $f(x) = \sqrt{x-a} - \sqrt{24-3x}$ 的值域是 $[-2\sqrt{3}, 2]$, 则 a 的值为 _____; $f(x)$ 的零点为 _____。(本题第一空 2 分,第二空 3 分)
- 若方程 $|2^x - 2| + 1 - m = 0$ 有两个不同实数解, 则实数 m 的取值范围为 _____。
- 已知函数 $f(x) = \min\left\{1 + \frac{4}{x}, \log_2 x\right\}$ 。若函数 $g(x) = f(x) - k$ 恰有两个不同的零点, 则 k 的取值范围为 _____。

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2, \\ 15-2^x, & x > 2. \end{cases}$ 若 $f(f(0)+f(a))=7$, 则 a 的值为_____.

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10 分)

已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \log_a(3-ax)$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

(1) 当 $x < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 在① $f(x)$ 在区间 $(1, 4)$ 上单调递增, ② 在区间 $(-1, 1)$ 上恒有 $f(x) \geq x^2$ 这两个条件中任

选一个补充到本题中, 求 $g(a) = \left(\frac{1}{2}\right)^a$ 的取值范围.

注: 如果选择多个条件分别解答, 则按第一个解答计分.

18. (12 分)

受疫情的影响, 政府出台了一系列助力复工复产的好政策. 城市快递行业运输能力迅速得到恢复, 市民的网络购物也越来越便利. 根据大数据统计, 某条快递线路运行时, 发车时间间隔 t (单位: 分钟) 满足 $4 \leq t \leq 15$, $t \in \mathbb{N}$, 平均每趟快递车辆的载件个数 p (单位: 个) 与发车时间

间隔 t 近似地满足 $p(t) = \begin{cases} 1800-15(9-t)^2, & 4 \leq t < 9, \\ 1800, & 9 \leq t \leq 15, \end{cases} t \in \mathbb{N}.$

(1) 若平均每趟快递车辆的载件个数不超过 1500 个, 试求发车时间间隔 t 的值.

(2) 若平均每趟快递车辆每分钟的净收益 $q(t) = \frac{6p(t)-7920}{t} - 80$ (单位: 元), 问当发车时间间隔 t 为多少时, 平均每趟快递车辆每分钟的净收益最大? 并求出最大净收益.

19. (12 分)

设函数 $f(x) = |2x-1| - |x+1| + ax$, $a \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = \frac{1}{2}$, 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 恰有三个零点, 求实数 a 的取值范围.

20. (12 分)

如今, 我国科技企业正在芯片自主研发之路中不断崛起. 根据市场调查某手机品牌公司生产某款手机的年固定成本为 40 万美元, 每生产 1 万部还需另投入 16 万美元. 设该公司一年内共生产该款手机 x 万部并全部销售完, 每万部的销售收入为 $R(x)$ 万美元, 且 $R(x) =$

$\begin{cases} 400-kx, & 0 < x \leq 40, \\ \frac{7400}{x} - \frac{40000}{x^2}, & x > 40. \end{cases}$ 当该公司一年内共生产该款手机 2 万部并全部销售完时, 年利润为

704 万美元.

(1) 写出年利润 W (单位: 万美元) 关于年产量 x (单位: 万部) 的函数解析式.

(2) 当年产量为多少万部时, 公司在该款手机的生产中所获得的利润最大? 并求出最大利润.

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) + kx$ 是偶函数.

(1) 求实数 k 的值;

(2) 若函数 $h(x) = 3^{f(x)+x} - m \cdot 3^x - 1$, $x \in [0, \log_3 5]$ 的最大值为 0, 求实数 m 的值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \ln mx - x$ ($m > 0$) 有两个不同的零点 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围;

(2) 若 $x_2 > 2x_1$, 求实数 m 的取值范围.