

龙岩市 2021 年高中毕业班第一次教学质量检测

数 学 试 题

(满分：150 分 考试时间：120 分钟)

注意事项：

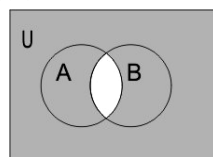
1. 考生将自己的姓名、准考证号及所有的答案均填写在答题卡上.
2. 答题要求见答题卡上的“填涂样例”和“注意事项”.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 z 满足 $z(1+i) = -3+i$ (i 为虚数单位)，则 z 的共轭复数的虚部为

- A. 2 B. $2i$
C. -2 D. $-2i$

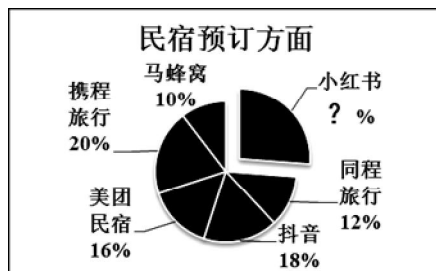
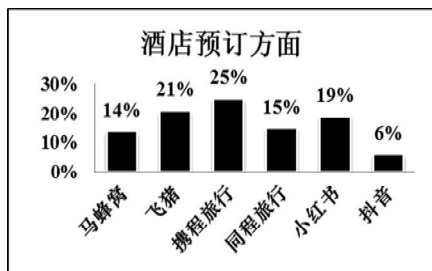
2. 若集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $A = \{1, 3, 5\}$ ， $B = \{3, 4, 5\}$ ，则图中阴影部分表示的集合的子集个数为



(第 2 题图)

- A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

3. 围绕民宿目的地进行吃住娱乐闭环消费已经成为疫情之后人们出游的新潮流. 在用户出行旅游决策中，某机构调查了某地区 1000 户偏爱酒店的用户与 1000 户偏爱民宿的用户住宿决策依赖的出行旅游决策平台，得到如下统计图，则下列说法中不正确的是



- A. 偏爱民宿用户对小红书平台依赖度最高
B. 在被调查的两种用户住宿决策中，小红书与携程旅行的占比总和相等
C. 小红书在所有被调查用户住宿决策中的占比与携程旅行在所有被调查用户住宿决策中的占比不相等
D. 在被调查的两种用户住宿决策中，同程旅行占比都比抖音的占比高
4. 在 $\triangle ABC$ 中， $A = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = 3$ ， $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{MB}$ ，则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} =$
- A. $-\frac{3}{11}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{11}$
5. 在 $(x+2)(x-1)^6$ 的展开式中， x^4 的系数为
- A. -20 B. -10 C. 10 D. 20

6. 2006年7月13日,河南安阳殷墟通过了世界遗产委员会的认可,成为世界文化遗产.考古科学家在测定遗址年龄的过程中利用了“放射性物质因衰变而减少”这一规律.已知样本中碳14的质量 N 随时间 t (单位:年)的衰变规律满足 $N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ (N_0 表示碳14原有的质量),经过测定,殷墟遗址某文物样本中碳14的质量约是原来的 $\frac{5}{6}$,据此推测此文物存

在的时期距今约(参考数据: $\log_2 3 \approx 1.6, \log_2 5 \approx 2.3$)

- A. 1719年 B. 2870年 C. 3075年 D. 4775年
7. 若三棱锥 $P-ABC$ 的四个面都为直角三角形,且 $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = 1$, $AC = 2$,则其外接球的表面积为
- A. 6π B. 5π C. 4π D. 3π
8. 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$,当 $x \in [0,1]$ 时,

$$f(x) = \begin{cases} e^x + a + b, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{bx-1}{x+1}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad (e \text{ 为自然对数的底数}), \text{ 则 } a-b \text{ 的值为}$$

- A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

二、选择题: 本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。

9. 若点 (a,b) 在直线 $x+2y-2=0$ 上,其中 $a>0$, $b>0$,则
- A. ab 的最大值为 $\frac{1}{2}$ B. $a+b$ 的最大值为2
- C. $a+b$ 的最小值为 $\sqrt{2}$ D. $\frac{2}{a+1} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{8}{3}$
10. 一个不透明的袋子中装有6个小球,其中有4个红球,2个白球,这些球除颜色外完全相同,则下列结论中正确的有
- A. 若一次摸出3个球,则摸出的球均为红球的概率是 $\frac{2}{5}$
- B. 若一次摸出3个球,则摸出的球为2个红球,1个白球的概率是 $\frac{3}{5}$
- C. 若第一次摸出一个球,记下颜色后将它放回袋中,再次摸出一个球,则两次摸出的球为不同颜色的球的概率是 $\frac{4}{9}$
- D. 若第一次摸出一个球,不放回袋中,再次摸出一个球,则两次摸出的球为不同颜色的球的概率是 $\frac{3}{5}$
11. 已知函数 $f(x) = \sin(x-\varphi) + \cos(2x-2\varphi)$,则下列结论正确的是
- A. 当 $\varphi=0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $\frac{9}{8}$
- B. 当 $\varphi=\pi$ 时,函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称
- C. π 是函数 $f(x)$ 的一个周期
- D. 不存在 φ ,使得函数 $f(x)$ 是奇函数

12. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , O 是坐标原点, P 为抛物线 C 上一动点, 直线 l 交 C 于 A, B 两点, 点 $Q(1, 1)$ 不在抛物线 C 上, 则
- A. 若 A, B, F, Q 四点共线, 则 $p = 2$
- B. 若 $|PQ| + |PF|$ 的最小值为 2, 则 $p = 2$
- C. 若直线 l 过焦点 F , 则直线 OA, OB 的斜率 k_{OA}, k_{OB} 满足 $k_{OA} \cdot k_{OB} = -\frac{1}{4}$
- D. 若过点 A, B 所作的抛物线的两条切线互相垂直, 且 A, B 两点的纵坐标之和的最小值为 4, 则 $\triangle ABQ$ 的面积为 4

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。(第 15 题第一空 2 分, 第二空 3 分)

13. 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2\ln x$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 1$, 则 a 的值为_____.
14. 将 1 ~ 2021 这 2021 个整数中能被 2 整除余 1 且被 3 整除余 2 的数按从小到大的顺序构成一个数列, 则该数列的项数为_____.
15. 已知抛物线 $y^2 = -8x$ 的准线与双曲线 $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线分别交于 A, B 两点, O 是坐标原点. 若 $\triangle AOB$ 的内切圆的周长为 π , 则内切圆的圆心坐标为_____, 双曲线 C 的离心率为_____.
16. 正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的棱长为 a , P 是正方体表面上的动点, 若 $|AP| = \sqrt{2}a$, 则动点 P 的轨迹长度为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

在 ① $c \sin B = \sqrt{3}b \cos C$, ② $2 \cos C - \sin(\frac{3\pi}{2} - 2C) = 2 \cos^2 C$,

③ $S_{\triangle ABC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \sin C$ 三个条件中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解决该问题.

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足_____, $c = 2$.

(1) 求角 C ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 周长的取值范围.

18. (本题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = a_n \cdot \log_2 a_{n+1}$, 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 当 $T_n - k \geq 0$ 对任意 $n \in N^*$ 都成立时, 求实数 k 的取值范围.

19. (本题满分 12 分)

为贯彻落实全国教育大会精神, 全面加强和改进新时代学校体育工作, 某校开展阳光体育“冬季长跑活动”. 为了解学生对“冬季长跑活动”的兴趣度是否与性别有关, 某调查小组随机抽取该校 100 名高中学生进行问卷调查, 其中认为感兴趣的人数占 80%.

- (1) 根据所给数据, 完成下面的 2×2 列联表, 并根据列联表判断是否有 90% 的把握认为学生对“冬季长跑活动”的兴趣度与性别有关?

	感兴趣	不感兴趣	合计
男		12	
女	36		
合计			100

- (2) 若用频率估计概率, 在随机抽取的 100 名学生中, 从男学生和女学生中各随机抽取 1 名学生, 求这 2 人中恰有 1 人不感兴趣的概率;
 (3) 若不感兴趣的男学生中恰有 5 名是高三学生. 现从不感兴趣的男学生中随机选出 3 名进行二次调查, 记选出高三男学生的人数为 X , 求 X 的分布列与数学期望.

附:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.076	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, \text{ 其中 } n = a+b+c+d.$$

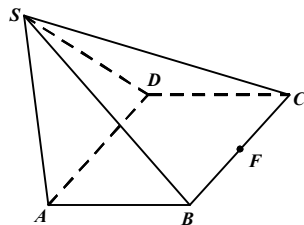
20. (本题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $S-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 侧面 SAD 为等腰直角三角形, $SA=SD=2\sqrt{2}$, $AB=2$, F 是 BC 的中点, 二面角 $S-AD-B$ 的大小为 120° , 设平面 SAD 与平面 SBC 的交线为 l .

- (1) 在线段 AD 上是否存在点 E , 使 $l \perp$ 平面 SEF ? 若存在, 确定点 E 的位置; 若不存在, 请说明理由;

- (2) 若点 Q 在 l 上, 直线 SB 与平面 QCD 所成角的正弦值为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 求线段 } DQ \text{ 的长.}$$



(第 20 题图)

21. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上、下顶点分别为 B_1, B_2 ,

左焦点为 F_1 , 且过点 $M(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, O 为坐标原点, $\Delta A_1 B_1 F_1$ 与 $\Delta O A_2 B_2$ 的面积比值为 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;

- (2) 直线 $l: y = kx + m (k > 0, m \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 记直线 OP, OQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 k 为 k_1, k_2 的等比中项, 求 ΔOPQ 面积的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x \ln x - ax^2 - x$, $g(x) = e^{x-1} - 3ax + a$ (e 为自然对数的底数)

- (1) 若函数 $f(x)$ 有两个极值点, 求 a 的取值范围;

- (2) 设函数 $h(x) = g(x) - f'(x)$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 求证: $h(x)$ 的极小值不大于 1.