

泉州市 2022 届高中毕业班质量监测（一）

2022.08

高三数学

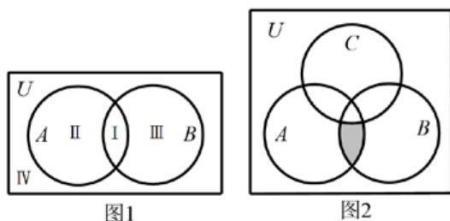
本试卷共 22 题，满分 150 分，共 6 页。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 考生作答时，将答案答在答题卡上。请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效。在草稿纸、试题卷上答题无效。
3. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色中性（签字）笔或碳素笔书写，字体工整、笔迹清楚。
4. 保持答题卡卡面清洁，不折叠、不破损。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{2, 3\}$ ，则 $A \cup B =$
A. $\{2\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{2, 3\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
2. 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1, -1)$ ，则 $z^2 =$
A. -2 B. 2 C. $-2i$ D. $2i$
3. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，设甲： $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递增，乙： $f(x)$ 满足 $f(1) < f(2)$ ，
则甲是乙的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 用图形直观表示集合的运算关系，最早是由瑞士数学家欧拉所创，故将表示集合运算关系的图形称为“欧拉图”。后来，英国逻辑学家约翰·韦恩在欧拉图的基础上创建了世人所熟知的“韦恩图”。韦恩用图 1 中的四块区域 I，II，III，IV 分别表示下列四个集合： $A \cap B$ ， $A \cap (\complement_U B)$ ， $(\complement_U A) \cap B$ ， $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ ，则图 2 中的阴影部分表示的集合为



- A. $A \cap B \cap C$ B. $(\complement_U A) \cap B \cap C$ C. $A \cap (\complement_U B) \cap C$ D. $A \cap B \cap (\complement_U C)$

5. 若 $\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 且 $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$, 则 $\tan \theta =$

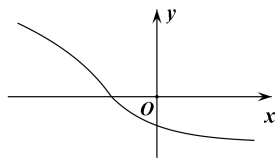
A. $\frac{1}{2}$

B. 2

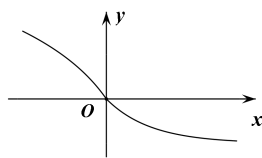
C. $\frac{1}{4}$

D. 4

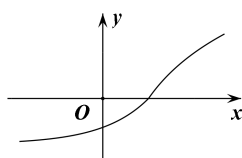
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} - 1, & x \leq 1, \\ \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$ 则函数 $y = f(1-x)$ 的图象大致为



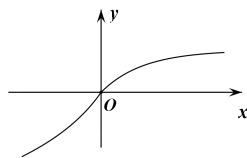
A



B



C



D

7. 已知两个正实数 x, y 满足 $x^2 - y = \ln y - \ln x$, 则下列式子中一定不成立的是

A. $x < y < 1$

B. $y < x < 1$

C. $1 < x < y$

D. $x = y = 1$

8. 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACD$ 所在的平面互相垂直, $AC = 25$, $AB = AD = 20$, $CB = CD = 15$, 则直线 AD 与 BC 所成的角的余弦值为

A. $\frac{7}{24}$

B. $\frac{7}{25}$

C. $\frac{24}{25}$

D. $\frac{12}{25}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知复数 $z = \sqrt{3} + i$ (i 为虚数单位), 则

A. $|z| = 2$

B. $\bar{z} = \sqrt{3} - i$

C. $z \cdot \bar{z} = 2$

D. $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, \sqrt{3})$, $\mathbf{b} = (\lambda, 1)$, 若 $(\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 4$, 则

A. $\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $|\mathbf{b}| = 2$

C. $\mathbf{a} // \mathbf{b}$

D. $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

11. 已知 $1 \leq a \leq 5$, $a + b = 8$, 则

A. $-6 \leq a - b \leq 2$

B. $7 \leq ab \leq 15$

C. $32 \leq a^2 + b^2 \leq 50$

D. $2^a + 8^b$ 的最小值为 128

12. 已知点 $D\left(\frac{3}{2}, 1\right)$, 直线 $l: 2kx - 2y - k + 2 = 0$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 2x = 1$, 过点 $P(0, -2)$ 分别作圆 C 的两条切线 PA , PB (A , B 为切点), H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 则

A. 直线 AB 的方程是 $x + 2y - 1 = 0$

B. l 被圆 C 截得的最短弦的长为 $\sqrt{3}$

C. 四边形 $PACB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. DH 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若棱长为 1 的正方体的所有顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为_____.

14. 过抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点的直线 l 交 C 于 A , B 两点，若 $|AB| = 9$ ，则线段 AB 中点的横坐标为_____.

15. 已知 $(x + m)^5 = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \cdots + a_5(x - 1)^5$ ($m \in \mathbf{R}$),

若 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3 + a_5)^2 = 3^5$, 则 $m =$ _____或_____.

16. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x + 2)$ 为偶函数, $f(x^3 + 1)$ 为奇函数, 且当 $x \in [0, 1]$ 时,

$f(x) = ax + b$. 若 $f(4) = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{100} \left[k \cdot f\left(k + \frac{1}{2}\right) \right] =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a = 4\sqrt{2}$, $b = 5$, $c = 7$.

(1) 求 $\cos A$ 的值;

(2) 若点 D 在边 BC 上, 且 $BD = 3CD$, 求 AD .

18. (12 分)

公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_1, a_2, a_4 成等比数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: $b_n = \begin{cases} a_n, n \leq 10, \\ b_{n-5}, n > 10, \end{cases}$ 求 $\{b_n\}$ 的前 20 项和.

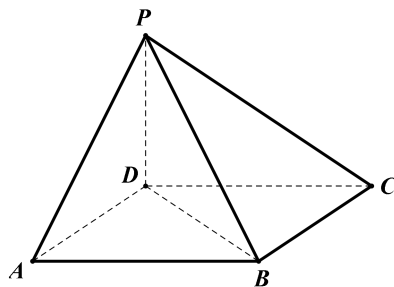
19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\angle BAD = 45^\circ$, 且 $AD = BD = PD = 1$.

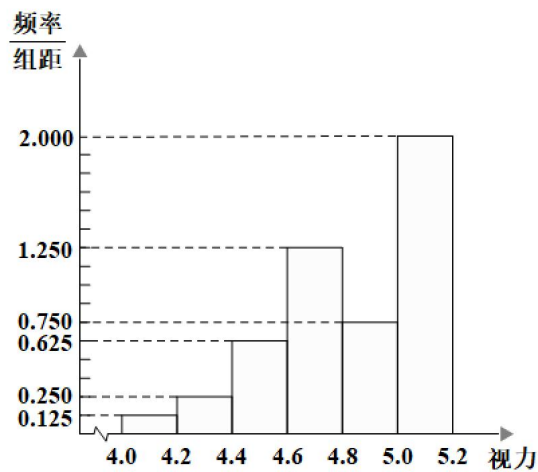
(1) 求证: $PA \perp PC$;

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



20. (12 分)

加强儿童青少年近视防控，促进儿童青少年视力健康是中央关心、群众关切、社会关注的“光明工程”。为了解青少年的视力与学习成绩间的关系，对某地区今年初中毕业生的视力和中考成绩进行调查。借助视力表测量视力情况，测量值 5.0 及以上为正常视力，5.0 以下为近视。现从中随机抽取 40 名学生的视力测量值和中考成绩数据，得到视力的频率分布直方图如下：



其中，近视的学生中成绩优秀与成绩一般的人数比例为 1:2，成绩一般的学生中视力正常与近视的人数比例为 3:4。

- (1) 根据频率分布直方图的数据，将下面的 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 90% 的把握认为视力情况与学习成绩有关；

学习 成绩 \ 视力情况	视力正常	近视	合计
成绩优秀			
成绩一般			
合计			

- (2) 将频率视为概率，从该地区今年初中毕业生中随机抽取 3 人，设近视的学生数为 X ，求 X 的分布列与期望。

附： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$ ，其中 $n = a + b + c + d$ 。

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

21. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 $A(0, -\sqrt{3})$, 直线 AF_2 的倾斜角为 60° , 原点 O 到直线 AF_2 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

(1) 求 E 的方程;

(2) 过 E 上任一点 P 作直线 PF_1, PF_2 分别交 E 于 M, N (异于 P 的两点), 且

$\overrightarrow{F_1M} = m\overrightarrow{PF_1}$, $\overrightarrow{F_2N} = n\overrightarrow{PF_2}$, 探究 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 是否为定值? 若是, 求出定值; 若不是, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + 1}{ax}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $(ex_1)^{x_2} = (ex_2)^{x_1}$ (e 是自然对数的底数), 且 $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 \neq x_2$,

证明: $x_1^2 + x_2^2 > 2$.