保密★启用用

泉州市2022届高中毕业班质量监测（一）

2021.08

数学参考答案及评分细则（选择题部分）

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本大题考查基础知识和基本运算。每小题5分，满分40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1． 若集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，则 $A\cup B=$

A．$\{2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{1,2,3\}$

【命题意图】本小题主要考查集合的含义、集合的运算等基础知识；主要考查运算求解能力；体现基础性，导向对发展数学运算核心素养的关注.

【试题简析】由已知可得 $A\cup B=\{1,2,3\}$，故选D.

2． 在复平面内，复数 z 对应的点的坐标是 $(1,-1)$，则 $z^2=$

A．-2　　B．2　　C．$-2\mathrm{i}$　　D．$2\mathrm{i}$

【命题意图】本小题主要考查复数的几何意义、复数的四则运算等基础知识；主要考查运算求解能力；渗透数形结合思想；体现基础性，导向对发展直观想象、数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】因为复数 z 对应的点的坐标是 $(1,-1)$，所以 $z=1-\mathrm{i}$，$z^2=(1-\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$，故选C.

3． 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，设甲：$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，乙：$f(x)$ 满足 $f(1)<f(2)$，则甲是乙的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件　　C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【命题意图】本小题主要考查充分必要条件、函数单调性定义等基础知识；考查逻辑推理和抽象概括等能力；考查转化与化归、函数与方程、特殊与一般等数学思想；体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、直观想象、数学抽象等核心素养的关注.

【试题简析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 满足 $f(1)<f(2)$，所以甲是乙的充分条件．$f(x)$ 仅满足 $f(1)<f(2)$，并不满足单调性定义中的“任意性”要求，故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上不一定单调递增，所以甲不是乙的必要条件．综上所述，甲是乙的充分不必要条件．故选 A．

4. 用图形直观表示集合的运算关系，最早是由瑞士数学家欧拉所创，故将表示集合运算关系的图形称为“欧拉图”．后来，英国逻辑学家约翰·韦恩在欧拉图的基础上创建了世人所熟知的“韦恩图”．韦恩用图 1 中的四块区域 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ分别表示下列四个集合：$A\cap B$，$A\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cap B$，$({}_U A)\cap({}_U B)$，则图 2 中的阴影部分表示的集合为

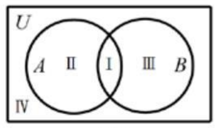


图1

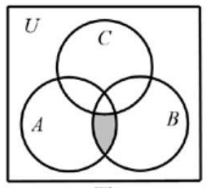


图2

A．$A\cap B\cap C$　　B．$(\complement_U A)\cap B\cap C$　　C．$A\cap(\complement_U B)\cap C$　　D．$A\cap B\cap(\complement_U C)$

【命题意图】本小题主要考查韦恩图、集合的运算等基础知识；考查集合思想的应用，考查逻辑推理、运算求解等能力，检测图形语言与符号语言的转换能力；考查化归与转化、数形结合等数学思想；体现基础性与应用性，导向对发展直观想象、数学运算等核心素养的关注．

【试题简析】阴影部分的元素具有“既是 A 的元素、又是 B 的元素、但不是 C 的元素”的共同特征，故应选 D．

5. 若 $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，且 $\sin 2\theta=\frac{4}{5}$，则 $\tan\theta=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．2　　C．$\frac{1}{4}$　　D．4

【命题意图】本小题主要考查二倍角公式、同角三角函数的基本关系和三角函数在各个象限的符号等基础知识；考查三角恒等变换，考查逻辑推理、运算求解等能力；考查函数与方程、转化与化归、数形结合等数学思想；体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注．

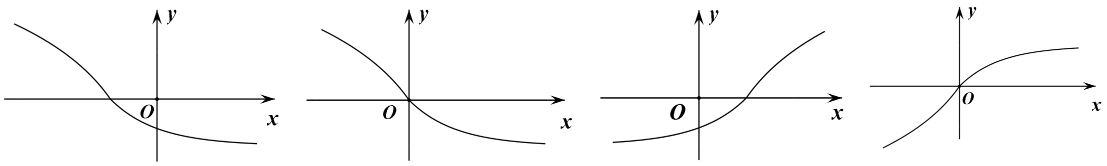
【试题简析】由已知，得 $\sin 2\theta=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{4}{5}$，即 $2\tan^2\theta-5\tan\theta+2=0$，

解得 $\tan\theta=2$ 或 $\tan\theta=\frac{1}{2}$，又 $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，则 $\tan\theta>1$，所以 $\tan\theta=2$，故选 B．

另解： 由 $\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，知 $\tan\theta>1$，故排除选项A、C；若 $\tan\theta=4$，由

$\sin\theta=4\cos\theta,\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，可解得 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{8}{17}$，与已知条件矛盾，可排除D．故选 B．

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-1, & x\le 1,\\ \log_2 x, & x>1,\end{cases}$ 则函数 $y=f(1-x)$ 的图象大致为



A　　　　B　　　　C　　　　D

【命题意图】本小题主要考查分段函数的含义与图象作法、指对数函数的图象、图象的变换、函数图象的含义等基础知识；考查逻辑推理、运算求解等能力；考查转化与化归、数形结合、函数与方程等思想；体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注.

【试题简析】令 $g(x)=f(1-x)$.

解法 1：$g(0)=f(1-0)=f(1)=e^0-1=0$ ， 又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $y=f(1-x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，故选 B.

解法 2：因为 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-1, x\le 1,\\ \log_2 x, x>1,\end{cases}$ 所以 $g(x)=f(1-x)=\begin{cases}e^{-x}-1, x\ge 0,\\ \log_2(1-x), x<0,\end{cases}$ ，通过作图象草图可选 B.

解法 3：先作 $f(x)=\begin{cases}e^{x-1}-1, x\le 1,\\ \log_2 x, x>1,\end{cases}$ 的图象关于 y 轴对称的图象，再把图象向右平移 1 个单位，得到 $y=f(1-x)$ 的图象，故选 B.

解法4： 由 $g(0)=f(1-0)=f(1)=e^0-1=0$ ，可排除A,C；由 $g(1)=f(1-1)=f(0)=e^{-1}-1<0$ ，可排除D． 故应选B.

7．已知两个正实数 x,y 满足 $x^2-y=\ln y-\ln x$ ，则下列式子中一定不成立的是

A． $x<y<1$　　　B． $y<x<1$　　　C． $1<x<y$　　　D． $x=y=1$

【命题意图】本小题主要考查不等式的性质、运用函数单调性比较数的大小等基础知识；考查逻辑推理、运算求解、抽象概括等能力；考查函数与方程、转化与化归、分类与整合等数学思想；体现基础性、综合性及应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】由 $x^2-y=\ln y-\ln x$ 得， $x^2+\ln x=y+\ln y$ ．可知 $f\left(x\right)=x+\ln x$ 在 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增.

当 $0<x<1$ 时， $y+\ln y=x^2+\ln x<x+\ln x$,所以 $f(y)<f(x)$,即 $0<y<x<1$ ；

当 $x=1$ 时， $y+\ln y=x^2+\ln x=x+\ln x$,所以 $f(y)=f(x)$,即 $x=y=1$ ；

当$x>1$时，$y+\ln y=x^2+\ln x>x+\ln x$,所以$f(y)>f(x)$,即$1<x<y$．故选 A.

另解：

当$\ln y-\ln x>0$即$y>x>0$时，有$x^2-y>0$，$x^2>y>x>0$，$x>1$，故有$y>x>1$的可能；

当$\ln y-\ln x<0$即$0<y<x$时，有$x^2-y<0$，$x^2<y<x$，$x<1$，故有$y<x<1$的可能；

将$x=y=1$代入$x^2-y=\ln y-\ln x$，易知等式成立. 综合以上，应选 A.

8．已知$\triangle ABC$与$\triangle ACD$所在的平面互相垂直，$AC=25$，$AB=AD=20$，$CB=CD=15$，则直线AD与BC所成的角的余弦值为

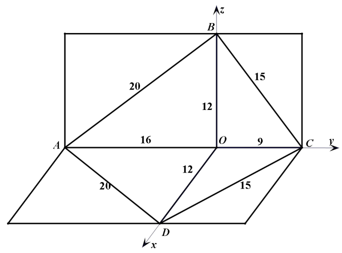
A．$\frac{7}{24}$　　B．$\frac{7}{25}$　　C．$\frac{24}{25}$　　D．$\frac{12}{25}$

【命题意图】本题考查面面垂直的性质、线线角的求解、空间向量的坐标运算、空间向量的应用等基础知识；考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力；考查数形结合思想、转化与化归思想等；考查模型意识与应用意识；体现基础性、综合性及应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象及数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】如右图所示，在边AC上取点O，使$OB\perp AC$，则同时$OD\perp AC$，

经计算，易得$OB=OD=12,AO=16,OC=9$，建立如图空间直角坐标系，

则$A(0,-16,0)$, $B(0,0,12)$, $C(0,9,0)$, $D(12,0,0)$，



$\overrightarrow{AD}=(12,16,0)$，$\overrightarrow{CD}=(0,9,-12)$，

$\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}>=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{16\times9}{20\times15}=\frac{12}{25}$，

故直线AD与BC所成的角的余弦值为$\frac{12}{25}$，故选 D.

另解：

如右图所示，在边AC上取点O，使$OB\perp AC$，则同时$OD\perp AC$，经计算，易得

$OB=OD=12,AO=16,OC=9$.

记向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{d}$，则$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=9\times16$，又$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{BC}|\,|\overrightarrow{AD}|\cos\left\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right\rangle=15\times20\times\cos\left\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD}\right\rangle$，

$\cos<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}>=\frac{12}{25}$，故直线$AD$与$BC$所成的角的余弦值为$\frac{12}{25}$，故选 D.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9．已知复数 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则

A. $|z|=2$　　B. $\overline{z}=\sqrt{3}-\mathrm{i}$　　C. $z\cdot\overline{z}=2$　　D. $\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

【命题意图】本题考查复数的模、共轭复数、复数的四则运算等基础知识；考查运算求解等能力；考查化归与转化思想；体现基础性，导向对发展数学运算等核心素养的关注.

【试题简析】$|z|=\sqrt{3+1}=2$ 故 A 正确；由共轭复数的概念，B 正确；$z\cdot\overline{z}=\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)=3-\mathrm{i}^2=4$，故 C 错误；$\dfrac{\overline{z}}{z}=\dfrac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^2}{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，故 D 正确.

10．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(\lambda,1)$，若 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=4$，则

A. $\lambda=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $|\boldsymbol{b}|=2$　　C. $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$　　D. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$

【命题意图】本题考查向量的坐标表示、向量的运算、向量的数量积、向量的模、向量的位置关系等基础知识；考查运算求解等能力；考查数形结合思想；体现基础性与综合性，导向对发展数学运算、直观想象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题简析】由 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=4$ 得：$\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 C 不正确，D 正确；由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda+\sqrt{3}=0$ 得：$\lambda=-\sqrt{3}$，故 A 不正确；因为 $\boldsymbol{b}=(-\sqrt{3},1)$，所以 $|\boldsymbol{b}|=2$，故 B 正确；故选 BD.

另解：若A正确，则B,C,D均错，由于是多选题，故A一定不正确；若B正确，则 $\lambda=\pm\sqrt{3}$，则C错误，而D可能正确，也可能错误；若C正确，则D错误，又 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，知B也错误，则C一定错误. 由前述分析，应选答案为BD. 【注：用此解法，可将此题视同为推理题.】

11．已知 $1\le a\le 5$，$a+b=8$，则

A．$-6\le a-b\le 2$　　B．$7\le ab\le 15$　　C．$32\le a^2+b^2\le 50$　　D．2^a+8^b 的最小值为 128

【命题意图】本题考查不等式的运算、基本不等式及二次函数等基础知识；考查运算求解、推理论证等能力；考查函数与方程思想、特殊与一般思想；体现基础性、综合性与应用性，导向对发展数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养的关注.

【试题解析】对于 A，由已知得，$a-b=2a-\left(a+b\right)=2a-8$，所以 $-6\le a-b\le 2$，A 正确；

对于 B，当 $a=b=4$ 时，$ab=16$，不等式不成立，故 B 错误；

对于 C，$a^2+b^2=a^2+\left(8-a\right)^2=2a^2-16a+64=2\left(a-4\right)^2+32$

由$1\le a\le 5$得$0\le\left(a-4\right)^2\le 9$，故$32\le 2\left(a-4\right)^2+32\le 50$，C 正确；

对于 D，$2^a+8^b=2^a+2^{3b}\ge 2\sqrt{2^{a+3b}}$，这里取等号的情况是当且仅当$a=3b$，即$\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$，

与$1\le a\le 5$矛盾，故 D 错误.

综上，应选 AC.

12．已知点$D\left(\dfrac{3}{2},1\right)$，直线$l:2kx-2y-k+2=0$，圆$C$：$x^2+y^2-2x=1$，过点$P(0,-2)$分别作圆$C$的两条切线$PA$，$PB$($A$，$B$为切点)．$H$在$\triangle ABC$外接圆上，则

A．直线AB的方程是$x+2y-1=0$　　B．l被圆C截得的最短弦的长为$\sqrt{3}$

C．四边形$PACB$的面积为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　D．DH的取值范围为$\left[\dfrac{\sqrt{5}}{2},\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right]$

【命题意图】本题考查直线和圆的基础知识、直线与圆的位置关系、过定点直线系等基础知识；考查运算求解与推理论证等能力；考查函数与方程思想、化归与转化思想、数形结合思想；体现综合性、应用性与创新性，体现选拔性要求，导向对发展直观想象、数学运算、逻辑推理、数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】对于选项 A，可有下列做法：

解法 1:由已知圆C：$x^2+y^2-2x=1$，得圆心$C\left(1,0\right)$，半径$r=\sqrt{2}$．因为$CA\perp PA$，$CB\perp PB$，由$|PC|=\sqrt{5},|PA|=\sqrt{3}$，由等积法（或射影定理），得$C\left(1,0\right)$到直线$AB$的距离为$\left|CQ\right|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

又直线PC的方程是$x+\dfrac{y}{-2}=1$，即$2x-y-2=0$，所以直线AB的方程可设为

$x+2y+m=0$，结合点$C\left(1,0\right)$到直线AB的距离为$\left|CQ\right|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，得$\dfrac{\left|m+1\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，解得$m=1$

或$m=-3$，结合图形可知直线AB的方程是$x+2y+1=0$，选项 A 错误.

解法2:设切点为$A'\left(x_0,y_0\right)$，以A'为切点的圆的切线方程可写成$x_0x+y_0y-\left(x+x_0\right)=1$，由于切线过点$P(0,-2)$，所以$x_0+2y_0+1=0$，若设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则$\begin{cases}x_1+2y_1+1=0\\x_2+2y_2+1=0\end{cases}$，所以直线$AB$的方程是$x+2y+1=0$，选项A错误.

解法3:因为P,A,C,B四点共圆，圆心为PC的中点$T\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$，半径为$R=\dfrac{\left|PC\right|}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，圆$T$的方程是$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+1\right)^2=\dfrac{5}{4}$，又圆$C$：$x^2+y^2-2x=1$，则两式相减得到直线$AB$的方程是

$x+2y+1=0$，选项A错误.

解法4： 通过作图，可判断 A,B 分别落在第三、第四象限，故直线 AB 的纵截距必为负数，所以直线 AB 的方程不可能是 $x+2y-1=0$，选项A错误.

对于选项 B：直线 $l:2kx-2y-k+2=0$ 可化为 $(2x-1)k=2y-2$，知直线恒过定点 $R\left(\frac{1}{2},1\right)$，可判断 $R\left(\frac{1}{2},1\right)$ 在圆内，故当且仅当 $CR\perp MN$ 时，弦长 $|MN|$ 最短，又 $|CR|=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，所以 $|MN|$ 的最小值是 $|MN|=2\sqrt{r^2-|CR|^2}=2\sqrt{2-\frac{5}{4}}=\sqrt{3}$，选项 B 正确.

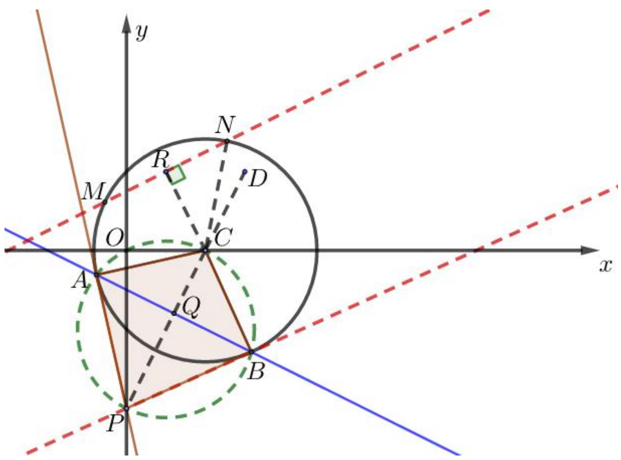
对于选项C：四边形 $PACB$ 的对角线 AB，PC 互相垂直，所以四边形 $PACB$ 的面积等于 $\frac{1}{2}|AB||PC|$

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{r^2-|CQ|^2}\,|PC|=\sqrt{2-\frac{4}{5}}\times\sqrt{5}=\sqrt{6}$，选项C错误.

另解：由已知圆 C：$x^2+y^2-2x=1$，得圆心 $C(1,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$．因为 $CA\perp PA$，$CB\perp PB$，由 $|PC|=\sqrt{5},|PA|=\sqrt{3}$，所以四边形 $PACB$ 的面积等于 $2S_{\Delta PAC}=2\times\frac{1}{2}|PA||AC|=\sqrt{6}$，故选项C错误.

对于选项 D：根据题意，知 $\triangle ABC$ 的外接圆恰好为经过 P,A,C,B 四点的圆．因为 PC 的中点 $T\left(\frac{1}{2},-1\right)$ 为外接圆的圆心，所以圆上点 H 到点 D 的距离最小值是 $|DT|-r=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，最大值是 $|DT|+r=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，所以 DH 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{3\sqrt{5}}{2}\right]$，选项 D 正确.

综上，知应选 BD.



保密★启用用

泉州市2022届高中毕业班质量监测（一）

2021.08

数学参考答案及评分细则（填空题部分）

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．若棱长为1的正方体的所有顶点都在球O的球面上，则球O的表面积为___________.

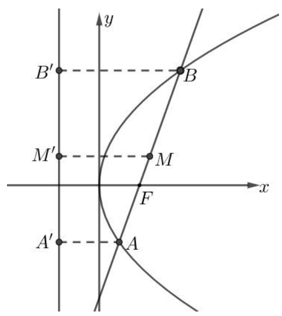
【命题意图】本小题考查正方体与球有关的基础知识；考查空间想象、推理论证、运算求解等能力；考查数形结合、化归与转化等思想；体现基础性与综合性，导向对发展数学运算、直观想象等核心素养的关注．

【试题简析】因为正方体的顶点都在同一球面上，所以正方体的体对角线为该球的直径，所以该球的半径$R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而该球的表面积$S=4\pi R^2=3\pi$．故答案为3π．

14．过抛物线$C:y^2=6x$的焦点的直线l交C于A，B两点，若$|AB|=9$，则线段AB中点的横坐标为_______.

【命题意图】本小题主要考查抛物线的定义、方程与性质，考查直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查逻辑推理、运算求解、抽象概括等能力；关注平面几何性质处理圆锥曲线问题，渗透函数与方程、化归与转化以及特殊与一般等数学思想；体现基础性与综合性，导向对发展逻辑推理、数学运算、数学抽象、直观想象等核心素养的关注．

【试题简析】



解法1： 设线段AB中点$M(x_0,y_0)$，由抛物线的定义，

得$|AB|=|AF|+|BF|=|AA'|+|BB'|=2|MM'|=2\left(x_0+\dfrac{3}{2}\right)=9$，

解得$x_0=3$．故答案为3．

解法2： 假设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，线段 AB 中点 $M(x_0,y_0)$，

因为直线 l 过焦点 $F\left(\frac{3}{2},0\right)$，且交 C 于 A，B 两点，所以可设其方程为：$x=ty+\frac{3}{2}$，

联立方程组 $\begin{cases}y^2=6x\\ x=ty+\frac{3}{2}\end{cases}$，化简整理，得 $y^2-6ty-9=0$，由韦达定理，得 $\begin{cases}y_1+y_2=6t\\ y_1y_2=-9\end{cases}$，

则弦长 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+t^2}\sqrt{36t^2+36}=6+6t^2=9$，

解得 $t^2=\frac{1}{2}$，又因为中点 $M(x_0,y_0)$，所以 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=3t$，

又因为 $M(x_0,3t)$ 在直线 l 上，所以 $x_0=ty_0+\frac{3}{2}=3t^2+\frac{3}{2}=3$．故答案为 3．

解法3： 假设直线 l 的倾斜角为 α，由已知可得 l 的斜率存在．由弦长公式，得 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{6}{\sin^2\alpha}=9$，

解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$，不妨假设 l 的倾斜角为锐角（由对称性知，钝角情形结果相同），所以 l 的

斜率 $k=\tan\alpha=\sqrt{2}$，

因为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 都在 l 上，所以 $\begin{cases}{y_1}^2=6x_1\\ {y_2}^2=6x_2\end{cases}$，则 $(y_1+y_2)(y_1-y_2)=6(x_1-x_2)$，即

$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{6}{y_1+y_2}=\frac{3}{y_0}=\sqrt{2}$，解得 $y_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，代入直线 l 方程 $y=\sqrt{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)$，解得 $x_0=3$．

故答案为 3．

15．已知 $(x+m)^5=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_5(x-1)^5\ (m\in\mathbf{R})$，若 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3+a_5)^2=3^5$，

则 $m=$___________．

【命题意图】本小题主要考查二项式定理等基础知识，考查函数与方程思想、特殊与一般思想，考查抽象概括、逻辑推理、运算求解能力，体现基础性与应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、数学抽象等核心素养的关注．

【试题简析】令 $x=0$，得 $m^5=a_0-a_1+a_2+\cdots-a_5$；令 $x=2$，得 $(2+m)^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_5$．

因为 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3+a_5)^2=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5)$，

所以 $[(2+m)m]^5=3^5$，解得：$m=-3$ 或 1．

16．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x+2)$ 为偶函数，$f(x^3+1)$ 为奇函数，当 $x\in[0,1]$ 时，

$f(x)=ax+b$．若 $f(4)=1$，则 $\sum_{k=1}^{100}\left[k\cdot f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]=$__________．

【命题意图】本小题主要考查函数奇偶性的性质、求函数的解析式、周期函数、运用周期函数性质求和等基础知识；考查抽象概括、逻辑推理、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化、分类与整合等数学思想；体现综合性、应用性与创新性，导向对发展逻辑推理、数学运算、数学抽象等核心素养的关注.

【试题简析】由于 $f(x+2)$ 为偶函数，则 $f(x+2)=f(-x+2)$ ①，

由于 $f(x^3+1)$ 为奇函数，则 $f(x^3+1)=-f(-x^3+1)$，即 $f(x+1)=-f(-x+1)$ ②，

由②得，$f(x)=-f(-x+2)$，由①得，$f(x)=-f(x+2)$，

所以 $f(x)=-f(x+2)=-[-f(x+4)]=f(x+4)$，即 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数.

由②，令 $x=0$,有 $f(1)=-f(1)$,即 $f(1)=0$. 因此，$a+b=0$.

又 $f(4)=f(0)=1$，所以 $b=1$.所以 $a=-1$.

当 $x\in[0,1]$ 时, $f(x)=-x+1$，所以：

$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，$f(\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2}+1)=-f(-\frac{1}{2}+1)=-f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$，

$f(\frac{5}{2})=f(\frac{1}{2}+2)=f(-\frac{1}{2}+2)=f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$, $f(\frac{7}{2})=f(\frac{3}{2}+2)=f(-\frac{3}{2}+2)=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

注意到 $(4m+1)f\left(4m+1+\frac{1}{2}\right)+(4m+2)f\left(4m+2+\frac{1}{2}\right)+(4m+3)f\left(4m+3+\frac{1}{2}\right)$

$+(4m+4)f\left(4m+4+\frac{1}{2}\right)=(4m+1)f\left(\frac{3}{2}\right)+(4m+2)f\left(\frac{5}{2}\right)+(4m+3)f\left(\frac{7}{2}\right)$

$+(4m+4)f\left(\frac{1}{2}\right)=2$,其中 $m\in\mathbf{N}$，

故 $\sum\limits_{k=1}^{100}\left[k\cdot f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]=100\div4\times2=50$.

另解：由 $f(x+2)$ 为偶函数，知 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称......①，

由 $f(x^3+1)$ 为奇函数，得 $f(x+1)$ 为奇函数，故 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称......②，

所以 $f(x)$ 是以4为周期的周期函数.

由 $f(4)=f(0)=1$，得 $b=1$.

由点 $(1,0)$ 在 $y=f(x)$ 的图象上，有 $f(1)=a+b=0$,所以 $a=-1$.

所以，当 $x\in\left[0,1\right]$ 时, $f(x)=-x+1$.

易求 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$，由②得 $f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$,由①得 $f(\frac{5}{2})=f(\frac{3}{2})=-\frac{1}{2}$,

又由 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ 与①得 $f(\frac{7}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

注意到 $\left(4m+1\right)f\left(4m+1+\frac{1}{2}\right)+\left(4m+2\right)f\left(4m+2+\frac{1}{2}\right)+\left(4m+3\right)f\left(4m+3+\frac{1}{2}\right)$

$+\left(4m+4\right)f\left(4m+4+\frac{1}{2}\right)=\left(4m+1\right)f\left(\frac{3}{2}\right)+\left(4m+2\right)f\left(\frac{5}{2}\right)+\left(4m+3\right)f\left(\frac{7}{2}\right)$

$+\left(4m+4\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=2$,其中 $m\in\mathbf{N}$，

故 $\sum\limits_{k=1}^{100}\left[k\cdot f\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]=100\div4\times2=50$.

保密★启用用

泉州市2022届高中毕业班质量监测（一）

2021.08

数学参考答案及评分细则（解答17-19题）

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

17．（10分）

记$\triangle ABC$的内角A, B, C的对边分别为a,b,c．已知$a=4\sqrt{2}$，$b=5$，$c=7$．

（1）求$\cos A$的值；

（2）点D在边BC上，且$BD=3CD$，求AD．

【命题意图】本小题主要考查解三角形与三角函数基本公式等基础知识；考查抽象概括、逻辑推理、运算求解等能力；考查数形结合思想、函数与方程思想；体现基础性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算、数学建模等核心素养的关注.

【试题解析】（1）由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ……………………………………3分

【正确写出任一形式的余弦定理即可得2分，正确选择出关于$\cos A$的余弦定理得3分】

$=\dfrac{25+49-32}{2\times5\times7}=\dfrac{3}{5}$． ………… 4分【求得正确的计算结果才得分】

解法1：（2） 由（1）得，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{4}{5}$， ……………………………………5分

$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{5\cdot\frac{4}{5}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………7分

【正确写出任一形式的正弦定理即可得2分】

由$b<a$得$B<A$，即B为锐角，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由$BD=3CD$，$BC=4\sqrt{2}$，可得，$BD=3\sqrt{2}$， ……………………………………8分

由余弦定理可得，$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD\cos B = 49 + 18 - 42 = 25$． 9分

所以 $AD = 5$． 10分

解法2：（2）由（1）得，$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{4}{5}$， 5分

$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{5\cdot\frac{4}{5}}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$， 7分

【正确写出任一形式的正弦定理即可得2分】

由 $b < a$ 得 $B < A$，即 B 为锐角，所以 $B = \dfrac{\pi}{4}$．

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$， 8分

$\overrightarrow{AD}^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \dfrac{9}{16}\overrightarrow{BC}^2$ 9分

$= 49 + \dfrac{3}{2}\times 7\times 4\sqrt{2}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \dfrac{9}{16}\times 32 = 25$

所以 $AD = 5$ ....10 分

18．（12 分）

公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_1，a_2，a_4 成等比数列．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_n = \begin{cases} a_n, n \le 10 \\ b_{n-5}, n > 10 \end{cases}$，求 $\{b_n\}$ 的前 20 项和．

【命题意图】本小题主要考查等差、等比数列的定义与前 n 项和等基础知识；考查抽象概括与运算求解能力；考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等．体现基础性与综合性，导向对发展数学抽象、数学运算及数学建模等核心素养的关注．

【试题解析】（1）因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2，

所以 $a_2 = a_1 + 2$，$a_4 = a_1 + 6$， ....1 分【等差数列概念】

因为 a_1，a_2，a_4 成等比数列，

所以 $(a_1+2)^2 = a_1(a_1+6)$， .... 2分【等比数列概念】

解得 $a_1 = 2$． ....3分【运算求解】

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 + (n-1)\times 2 = 2n$． .... 5分【等差数列通项公式】

（2） 因为 $b_n=\begin{cases}a_n, & n\le 10,\\ b_{n-5}, & n>10,\end{cases}$

所以 $b_{16}+\cdots+b_{20}=b_{11}+\cdots+b_{15}=b_6+\cdots+b_{10}$，…6分【分段函数概念与抽象概括能力】

所以 $\{b_n\}$ 的前20项和 $=(b_1+b_2+\cdots+b_5)+(b_6+\cdots+b_{10})+(b_{11}+\cdots+b_{15})+(b_{16}+\cdots+b_{20})$

……………………………………………………7分【分组求和方法】

$=(b_1+b_2+\cdots+b_5)+3(b_6+\cdots+b_{10})$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_5)+3(a_6+\cdots+a_{10})$ …………………8 分【函数概念】

$=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}+3\times\dfrac{5(a_6+a_{10})}{2}$ ……………… 11分【等差数列求和公式】

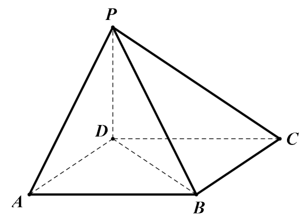
$=\dfrac{5(2+10)}{2}+3\times\dfrac{5(12+20)}{2}=270$． ……………………………………12分

19．（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PD\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $\angle BAD=45^\circ$，且 $AD=BD=PD=1$．

（1）求证： $PA\perp PC$；

（2）求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值.



【命题意图】本题综合考查线线垂直的判定与性质、二面角的求解及空间向量的运算与应用等基础知识；考查空间想象能力、推理论证及运算求解能力；考查数形结合思想、化归与转化思想等；体现基础性、综合性与应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算、直观想象等核心素养的关注．通过对立体几何板块学科本质的考查，来实现对学生综合运用学科知识分析问题和解决问题的能力的评价，将知识、能力和素养融为一体，全面检测考生的数学素养，有效地在问题的求解过程中实现对数学思想方法和学科本质的考查.

【试题解析】

解法 1：（1）由 $AD=BD$ 得， $\angle ABD=\angle BAD=45^\circ$，所以 $\angle ADB=90^\circ$，

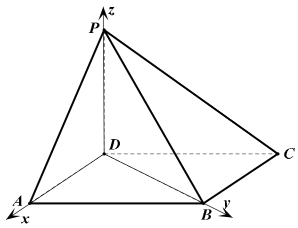
又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 DA, DB, DP 两两垂直，…………………1分【线面垂直概念】

分别以 DA, DB, DP 为 x 轴， y 轴， z 轴建立如图空间直角坐标系，……………………… 2分

所以 $A(1,0,0), C(-1,1,0), P(0,0,1), B(0,1,0)$， ……………………………………………………3分

所以 $\overrightarrow{PA}=(1,0,-1), \overrightarrow{PC}=(-1,1,-1)$， ……………………………………………………………4分

因为 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-1+0+1=0$，所以 $PA\perp PC$． ………………………………………… 5分



（2） 由（1）得 $\overrightarrow{PB}=(0,1,-1)$，设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PAB 的一个法向量

所以有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1-z_1=0\\ y_1-z_1=0\end{cases}$. 6分

可取 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$. 7分

同理，设 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 为平面 PBC 的一个法向量,

所以有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x_2+y_2-z_2=0\\ y_2-z_2=0\end{cases}$， 8分

可取 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$ 9分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1+1}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 11分

由图可知，二面角 $A-PB-C$ 的平面角是钝角，

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 12分

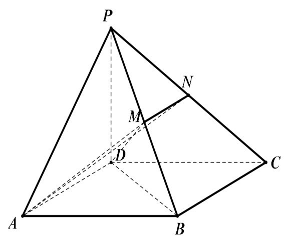
解法2： （1）在平行四边形 $ABCD$ 中，易得 $CD=AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{2}$. 1分

由余弦定理得，$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos135^\circ=5$. 2分

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以有 $PD\perp AD, PD\perp DC$， ......3 分

所以 $PA^2=PD^2+AD^2=2$，$PC^2=PD^2+CD^2=3$， 4分

所以 $AC^2=PA^2+PC^2$，所以 $PA\perp PC$. 5分



（2） 分别取 PB,PC 的中点 M,N，连接 MA,MN,MD，

由（1）知，$PA=AB=PB$，所以 $MA\perp PB$，$MA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. 6分

由 $PB=\sqrt{2},PC=\sqrt{3},BC=1$ 可知，$BC\perp PB$． 7分

又 M,N 分别为 PB,PC 的中点，所以 $MN\,//\,BC$，即 $MN\perp PB$， 8分

因为 MA,MN 分别为平面 PAB 与平面 PBC 内的直线，

且它们的交点 M 在直线 PB 上，所以 $\angle AMN$ 为二面角 $A-PB-C$ 的平面角． 9分

因为 $MN\,//\,AD$，所以 $\angle AMN+\angle MAD=180^\circ$．

由（1）知，$AD\perp$ 平面 PBD，即 $\angle ADM=90^\circ$， 10分

所以 $\cos\angle MAD=\dfrac{AD}{MA}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$， 11分

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． 12分

解法3：（1）在平行四边形 $ABCD$ 中，易得 $CD=AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{2}$，$\angle ADC=135^\circ$． 1分

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，所以有 $PD\perp AD,PD\perp DC$， 2分

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA},\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}$． 3分

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DA})\cdot(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC})=|\overrightarrow{PD}|^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=1+1\times\sqrt{2}\times(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=0$， ....4 分

所以 $PA\perp PC$． 5分

（2）由 $AD=BD$ 得，$\angle ABD=\angle BAD=45^\circ$，所以 $\angle ADB=90^\circ$，

由（1）可得 $DA\perp$ 面 DPB， 6分

又 $PB\subset$ 面 DPB，所以 $DA\perp PB$，

由四边形 $ABCD$ 为平行四边形，知 $BC\,//\,DA$，所以 $BC\perp PB$． 7分

取 PB 的中点 M，连接 MA,MD，

经计算知 $PA=AB=PB=\sqrt{2}$，所以 $MA\perp PB$， 8分

且 $MA=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AB=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$．

由 $BC\perp PB$ 且 $MA\perp PB$，得二面角 $A-PB-C$ 的大小等于 $<\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BC}>$． 9分

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DP},\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$， 10分

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{DA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DP})\cdot(-\overrightarrow{DA})=-|\overrightarrow{DA}|^2=-1$，

又 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{MA}||\overrightarrow{BC}|\cos<\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BC}>=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cos<\overrightarrow{MA},\overrightarrow{BC}>$， 11分

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$． 12分

保密★启用用

泉州市2022届高中毕业班质量监测（一）

2022.08

数学参考答案及评分细则（第20、21题）

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

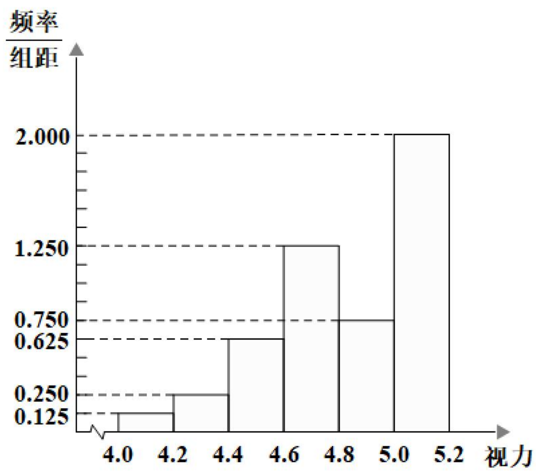
2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

20.（12分）

加强儿童青少年近视防控，促进儿童青少年视力健康是中央关心、群众关切、社会关注的“光明工程”．为了解青少年的视力与学习成绩间的关系，对某地区今年初中毕业生的视力和中考成绩进行调查．借助视力表测量视力情况，测量值5.0及以上为正常视力，5.0以下为近视．现从中随机抽取40名学生的视力测量值和中考成绩数据，得到视力的频率分布直方图如下：



其中，近视的学生中成绩优秀与成绩一般的人数比例为$1:2$，成绩一般的学生中视力正常与近视的人数比例为$3:4$．

（1）根据频率分布直方图的数据，将下面的2×2列联表补充完整，并判断是否有90%的把握认为视力情况与学习成绩有关；

视力情况 / 学习成绩	视力正常	近视	合计
成绩优秀			
成绩一般			

合计			

（2）将频率视为概率，从该地区今年初中毕业生中随机抽取3人，设近视的学生数为 X ，求 X 的分布列与期望.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.100	0.050	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

【命题意图】本小题主要考查频率分布直方图、独立性检验、二项分布、数学期望等基础知识；考查数据处理能力、应用意识等；考查必然与或然思想、统计与概率思想；体现综合性与应用性，导向对发展数学运算、数学建模、数据分析等核心素养的关注.

【试题简析】（1）根据频率分布直方图，在抽取的 40 名学生样本中，视力正常的有 $2\times0.2\times40=16$ 人，

近视的有 $40-16=24$ 人. . . . . 1 分【列联表不全正确，但这两数据填写正确，可得 1 分】

因为近视的学生中成绩优秀与成绩一般的比例是 $1:2$ ，

所以近视的学生中成绩优秀的有 $24\times\dfrac{1}{3}=8$ 人，成绩一般的有 $24-8=16$ 人；

因为成绩一般的学生中视力正常与近视的比例为 $3:4$ ，

所以成绩一般的学生中，视力正常的学生有 $16\times\dfrac{3}{4}$=12 人.

根据上述信息可填写下列 2×2 列联表：

	视力正常	近视	合计
成绩优秀	4	8	12
成绩一般	12	16	28
合计	16	24	40

. . . . 2 分【表格填写正确】

根据列联表数据可得 $K^2=\dfrac{40(4\times16-8\times12)^2}{16\times24\times28\times12}=\dfrac{20}{63}\approx0.317$ ，. . . . . 3 分

因为 $K^2\approx0.317<2.706$ ，. . . . . 4 分

故没有 90% 的把握认为视力情况与学习成绩有关.　. . . . . 5 分

（2）　以频率视为概率，可知，样本中近视的概率为 $\dfrac{24}{40}=\dfrac{3}{5}$，视力正常的概率为 $\dfrac{2}{5}$，

依题意，近视的学生数 X 的所有可能取值为 $0,1,2,3$． ....6 分

以样本估计总体，可知 $X\sim B(3,\frac{3}{5})$，

................8 分【“以样本估计总体”，1 分；“ $X\sim B(3,\frac{3}{5})$ ” 1 分】

$P(X=0)=C_3^0(\frac{3}{5})^0(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$， $P(X=1)=C_3^1(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^2=\frac{36}{125}$，

$P(X=2)=C_3^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^1=\frac{54}{125}$， $P(X=3)=C_3^3(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^0=\frac{27}{125}$，

....10 分【1 或 2 个正确得 1 分，3 或 4 个正确得 2 分】

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

$E(X)=0\times\frac{8}{125}+1\times\frac{36}{125}+2\times\frac{54}{125}+3\times\frac{27}{125}=\frac{225}{125}=\frac{9}{5}$ （或 $E(X)=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$）.

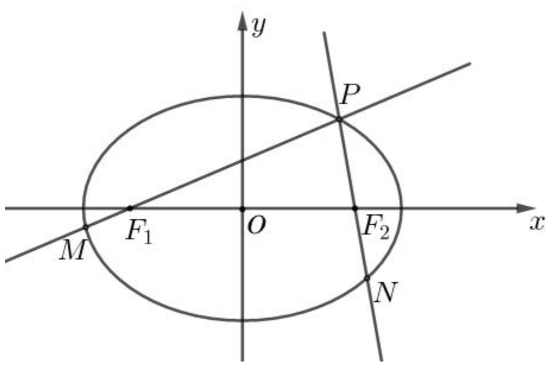
....12 分【期望计算公式 1 分，计算结果 1 分】

21．（12 分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，点 $A\left(0,-\sqrt{3}\right)$，直线 AF_2 的倾斜角为 60°，原点 O 到直线 AF_2 的距离是 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$．

（1）求 E 的方程；

（2）过 E 上任一点 P 作直线 PF_1,PF_2 分别交 E 于 M，N （异于 P 的两点），且 $\overrightarrow{F_1M}=m\overrightarrow{PF_1}$，$\overrightarrow{F_2N}=n\overrightarrow{PF_2}$，探究 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 是否为定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由．



【命题意图】本小题主要考查椭圆的方程与性质、直线与椭圆的位置关系等基础知识，考查抽象概括、推理论证、运算求解等能力；考查函数与方程思想、数形结合思想、转化与化归思想；体现综合性、应用性与创新性，彰显高考的选拔特点，导向对发展数学抽象、逻辑推理、数学运算

直观想象、数学建模等核心素养的关注.

【试题简析】

（1）**解法一：** 点 $A\left(0,-\sqrt{3}\right)$，直线 AF_2 的倾斜角为 60°，可得 $c=1$，..1分

在 $\mathrm{Rt}\Delta AOF_2$ 中，求得点 O 到直线 AF_2 的距离是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又已知点 O 到直线 AF_2 的距离是 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以 $a^2=2$，..2分

由 $a^2=b^2+c^2$，..3分

求得 $b^2=1$，..4分

所以，E 的方程是 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 4分

解法二： 由点 $A\left(0,-\sqrt{3}\right)$，直线 AF_2 的倾斜角为 60°，

可得 $k_{AF_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{c}=\sqrt{3},c=1$. ....1分【求c得1分】

由 $AF_2:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$，得点 O 到直线 AF_2 的距离 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又已知点 O 到直线 AF_2 的距离是 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$，所以 $a^2=2$，..2分

由 $a^2=b^2+c^2$，..3分

求得 $b^2=1$，..4分

所以，E 的方程是 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. 4分

（2）**解法1：** 当 P 为椭圆右顶点时，

$\dfrac{1}{m}=\dfrac{PF_1}{F_1M}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，$\dfrac{1}{n}=\dfrac{PF_2}{F_2N}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$， ...5分【特例或分类分数】

当 P 为椭圆左顶点时，同理可得，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$. 5分

当 P 不为椭圆顶点，即直线 PM,PN 的斜率均不为零时，

设直线 PM 的方程是 $x=-1+ry$，直线 PN 的方程是 $x=1+sy$，....6分【直线方程】

分别代入椭圆方程 $x^2+2y^2-1=0$，得：

$(r^2+2)y^2-2ry-1=0$ 和 $(s^2+2)y^2+2sy-1=0$. ...7分【方程思想与运算求解】

设 $P\left(x_0,y_0\right),M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$,

则 $y_0y_1=-\dfrac{1}{r^2+2}$，$y_0y_2=-\dfrac{1}{s^2+2}$． ……………………8分【根与系数关系】

【说明：5分至8分的各分点，只需做出 PM 、PN 中的一种情况，即可对应给分】

由 $\overrightarrow{F_1M}=m\overrightarrow{PF_1}$，得 $y_1=-my_0$，$\dfrac{1}{m}=-\dfrac{y_0}{y_1}=y_0^2(r^2+2)$，………………………9分

由 PM：$x=-1+ry$，得 $r=\dfrac{x_0+1}{y_0}$，

所以 $\dfrac{1}{m}=y_0^2(r^2+2)=(x_0+1)^2+2y_0^2=3+2x_0$，……………………… 10分

由 $\overrightarrow{F_2N}=n\overrightarrow{PF_2}$，仿前述过程，可得 $\dfrac{1}{n}=3-2x_0$， …………………………………11分

【说明：含5至10分一起，在此处直接同理得 $\dfrac{1}{n}=3-2x_0$，可得第11分】

所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$，为定值.

综上可得 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 恒为定值，且该定值为 6． …………………………12分【整合的分数】

解法2： 设 $P(x_0,y_0),M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$, 又 $F_1(-1,0),F_2(1,0)$,

①当 $y_1=0$或$y_2=0$时，$y_0=0$，P 为椭圆的顶点，

无妨设 P 为椭圆的右顶点，

则 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{PF_1}{F_1M}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$，$\dfrac{1}{n}=\dfrac{PF_2}{F_2N}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$， ……………… 5分

当 P 为椭圆左顶点时，同理可得，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$． ……………… 5分

②当 $x_1=-1$ 时，则 $x_0=-1$，无妨取 $P(-1,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，则 $M(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，$PN$：$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$，

将 PN：$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$ 代入 $x^2+2y^2-1=0$，

得：$5x^2-2x-7=0$，求得 $x_2=\dfrac{7}{5}$，

由 $\overrightarrow{F_1M}=m\overrightarrow{PF_1}$，$\overrightarrow{F_2N}=n\overrightarrow{PF_2}$，得 $m=1$，$\dfrac{1}{n}=\dfrac{PF_2}{F_2N}=\dfrac{1-(-1)}{\dfrac{7}{5}-1}=5$，

所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$． ……………… 6分

当 $x_2=1$ 时，同理可求得 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$． ……………… 6分

【说明：上述四种特例情况，只要做出一种，即可得第5分】

③当 $x_1\neq-1,x_2\neq1,y_1\neq0,y_2\neq0$ 时，

$\frac{1}{m}=\frac{\overrightarrow{PF_1}}{\overrightarrow{F_1M}}=-\frac{x_0+1}{x_1+1}=-\frac{y_0}{y_1}$，$\frac{1}{n}=\frac{\overrightarrow{PF_2}}{\overrightarrow{F_2N}}=-\frac{x_0-1}{x_2-1}=-\frac{y_0}{y_2}$． ……… 7分

直线 PM 的方程是 $y=\frac{y_0}{x_0+1}(x+1)$，……………………………………………………………… 8分

联立方程组 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ y=\frac{y_0}{x_0+1}(x+1).\end{cases}$，

代入消元得 $\left(x_0^{\ 2}+2x_0+1+2y_0^{\ 2}\right)y^2-2\left(x_0+1\right)y_0y-y_0^{\ 2}=0$，……………………………9分

又因为点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在椭圆 E 上，所以 $x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}=2$，

故 $\left(2x_0+3\right)y^2-2\left(x_0+1\right)y_0y-y_0^{\ 2}=0$，

因 $2x_0+3\neq 0$，由韦达定理，得 $y_0y_1=\frac{-y_0^{\ 2}}{2x_0+3}$，即 $-\frac{y_0}{y_1}=2x_0+3$． ………………10分

同理，直线 PN 的方程是 $y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，

联立方程组 $\begin{cases}x^2+2y^2-2=0,\\ y=\frac{y_0}{x_0-1}(x-1)\end{cases}$，

代入消元得 $\left(3-2x_0\right)y^2+2\left(x_0-1\right)y_0y-y_0^{\ 2}=0$，

因 $2x_0-3\neq 0$，由韦达定理，得 $y_0y_2=\frac{-y_0^{\ 2}}{3-2x_0}$，即 $-\frac{y_0}{y_2}=3-2x_0$，…………………11分

【直接表达为，“仿前述过程，同理可得 $-\frac{y_0}{y_2}=-2x_0+3$”，可得第11分】

于是 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{y_0}{-y_1}+\frac{y_0}{-y_2}=\left(2x_0+3\right)+\left(-2x_0+3\right)=6$，为定值.

综上可得 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 恒为定值，且该定值为 6． ………………………12分【整合的分数】

解法3： 设 $P\left(x_0,y_0\right),M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，又 $F_1\left(-1,0\right),F_2\left(1,0\right)$，

①当直线 PM 的斜率不存在时，即 $x_1=-1$，$x_0=-1$，

无妨取 $P(-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，则 $M(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$PN$：$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$，

将 PN：$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-1)$ 代入 $x^2+2y^2-1=0$，

得：$5x^2-2x-7=0$，求得 $x_2=\frac{7}{5}$，

由 $\overrightarrow{F_1M}=m\overrightarrow{PF_1}$，$\overrightarrow{F_2N}=n\overrightarrow{PF_2}$，得 $m=1$，$\frac{1}{n}=\frac{PF_2}{F_2N}=\frac{1-(-1)}{\frac{7}{5}-1}=5$，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=6$． ……………5分

②当直线 PN 的斜率不存在时，根据图形对称性知，同理可求得 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=6$． …5分

【说明：上述两种特例情况，只要做出一种，即可得第5分】

③当直线 PM，PN 的斜率都存在时，

设 $PM:y=k(x+1)$， ……………………………………6分

联立方程组 $\begin{cases}x^2+2y^2-1=0,\\ y=k(x+1).\end{cases}$

代入消元得 $x^2+2k^2(x+1)^2-2=0$，……………………………………7分

方程整理为 $(2k^2+1)(x+1)^2-2(x+1)-1=0$，…………………………8分

则有 $(x_0+1)(x_1+1)=-\frac{1}{2k^2+1}$， ……………………………9分

由 $\overrightarrow{F_1M}=m\overrightarrow{PF_1}$，得

$$\frac{1}{m}=\frac{|\overrightarrow{PF_1}|}{|\overrightarrow{F_1M}|}=-\frac{x_0+1}{x_1+1}=-\frac{(x_0+1)^2}{(x_1+1)(x_0+1)}=(2k^2+1)(x_0+1)^2,$$

因直线直线 PM 过 $F_1(-1,0)$，所以 $k=\frac{y_0}{x_0+1}$，

所以 $\frac{1}{m}=(2k^2+1)(x_0+1)^2=(\frac{2y_0^2}{(x_0+1)^2}+1)(x_0+1)^2=(2y_0^2+x_0^2+2x_0+1)=3+2x_0$

（用到 P 在椭圆 E 上，得 ${x_0}^2+2{y_0}^2=2$）． ……………………10分

仿前述过程，可得 $\frac{1}{m}=3-2x_0$， …..11分【说明：此处不能表述为同理可得】

于是 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(2x_0+3\right)+\left(-2x_0+3\right)=6$，为定值.

综上可得 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 恒为定值，且该定值为 6． ……………………12分【整合的分数】

解法4： 设 $P\left(x_0,y_0\right),M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，又 $F_1\left(-1,0\right),F_2\left(1,0\right)$，

由已知 $\overrightarrow{F_1M}=m\overrightarrow{PF_1}$，得 $\left(x_1+1,y_1\right)=m\left(-1-x_0,-y_0\right)$，

即 $\begin{cases}x_1+1=-m-mx_0\\ y_1=-my_0\end{cases}$，亦即 $\begin{cases}x_1=-m-mx_0-1\\ y_1=-my_0\end{cases}$，……………………………………………5分

又因为点 $M\left(x_1,y_1\right)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，所以 ${x_1}^2+2{y_1}^2=2$，…………………………6分

代入，得 $\left(m+1+mx_0\right)^2+2m^2{y_0}^2-2=0$，

式子展开，得 $\left(m+1\right)^2+2\left(m+1\right)mx_0+m^2{x_0}^2+2m^2{y_0}^2-2=0$，

即 $\left(m+1\right)^2+2\left(m+1\right)mx_0+m^2\left({x_0}^2+2{y_0}^2\right)-2=0$，…………………………………………7分

又因为点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，所以 ${x_0}^2+2{y_0}^2=2$，…………………………8分

则 $\left(m+1\right)^2+2\left(m+1\right)mx_0+2\left(m^2-1\right)=0$，

依题设条件，知 $m\neq-1$，故 $\left(m+1\right)+2mx_0+2\left(m-1\right)=0$，

则 $2mx_0+\left(3m-1\right)=0$，………………………………………………………………………………9分

同理可得 $-2nx_0+\left(3n-1\right)=0$，……………………………………………………………………10分

依题设条件，知 $m\neq0,n\neq0$，故 $\dfrac{1}{m}=3+2x_0$，$\dfrac{1}{n}=3-2x_0$，…………………………11分

【此得分点亦可这样处理：消去 x_0，得 $2m\left(\dfrac{3n-1}{2n}\right)+\left(3m-1\right)=0$，

即 $2m\left(\dfrac{3n-1}{2n}\right)+\left(3m-1\right)=0$，故 $6mn=m+n$，……………………………………11分】

于是 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=6$，故 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$ 为定值．　……………………………………………………12分

解法5： 令 $\dfrac{1}{m}=\lambda$，$\dfrac{1}{n}=\mu$，则 $\lambda>0,\mu>0$，$\overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}$，$\overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}$，

设 $P\left(x_0,y_0\right),M\left(x_1,y_1\right),N\left(x_2,y_2\right)$，又 $F_1\left(-1,0\right),F_2\left(1,0\right)$，……………………………………5分

则有 $\left(-1-x_0,-y_0\right)=\lambda\left(x_1+1,y_1\right)$；$\left(1-x_0,-y_0\right)=\mu\left(x_2-1,y_2\right)$；

因此 $\begin{cases}-1-x_0=\lambda\left(x_1+1\right)\\ y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\dfrac{x_0+\lambda x_1}{1+\lambda}=-1\cdots①\\ y_0+\lambda y_1=0\end{cases}$……………………………………6分

由于点 P,M 均在椭圆上，则 $\begin{cases}\dfrac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1\\ \dfrac{{x_1}^2}{2}+{y_1}^2=1\end{cases}$ ，即 $\begin{cases}\dfrac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2=1\\ \dfrac{\lambda^2{x_1}^2}{2}+\lambda^2{y_1}^2=\lambda^2\end{cases}$ ，……………………7分

作差，得 $\frac{1}{2}\left(x_0+\lambda x_1\right)\left(x_0-\lambda x_1\right)+\left(y_0+\lambda y_1\right)\left(y_0-\lambda y_1\right)=1-\lambda^2$

变形并将①式代入，得 $\frac{1}{2}\frac{\left(x_0+\lambda x_1\right)}{1+\lambda}\frac{\left(x_0-\lambda x_1\right)}{1-\lambda}+\frac{\left(y_0+\lambda y_1\right)}{1+\lambda}\frac{\left(y_0-\lambda y_1\right)}{1-\lambda}=1$，…………8分

于是 $\frac{1}{2}\times\left(-1\right)\cdot\frac{\left(x_0-\lambda x_1\right)}{1-\lambda}=1$，所以 $x_0+2=\lambda\left(x_1+2\right)$，…………………………………………9分

又 $x_0+1=-\lambda\left(x_1+1\right)$，两式相加，得 $\lambda=2x_0+3$，…………………………………………10分

同理可得 $\mu=3-2x_0$，……………………………………………………………………11分

因此 $\lambda+\mu=6$，故 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 为定值．…………………………………………………………12分

保密★启用用

泉州市2022届高中毕业班质量监测（一）

2021.08

数学参考答案及评分细则（第22题）

22.（12分）

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x+1}{ax}$.

（1） 讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2） 若 $\left(ex_1\right)^{x_2}=\left(ex_2\right)^{x_1}$ (e 是自然对数的底数)，且 $x_1>0,x_2>0$， $x_1\neq x_2$，

证明： ${x_1}^2+{x_2}^2>2$.

【命题意图】本小题主要考查运用导函数求单调性、对数运算性质、函数极值点偏移、不等式放缩、基本不等式等基础知识；考查抽象概括、推理论证、运算求解等能力；考查函数与方程、化归与转化、分类与整合等数学思想；体现综合性、应用性与创新性，导向对发展逻辑推理、数学运算、数学抽象、数学建模等核心素养的关注. **鉴于高三复习前测特点，适当提高试题前半部分基础性应用的分值分配比例.**

【试题简析】（1） 由 $f'\left(x\right)=\dfrac{-\ln x}{ax^2}$， 1分

令 $f'\left(x\right)=0$ ，得 $x=1$ ， 2分

当 $a>0$ 时, 若 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $f'\left(x\right)>0$ ；若 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $f'\left(x\right)<0$ . ...3 分

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减. 4分

当 $a<0$ 时, 若 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $f'\left(x\right)<0$ ；若 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $f'\left(x\right)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增. 5分

综上, 当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递增，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递减；

当 $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $\left(0,1\right)$ 上单调递减，在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增.

（2）证明： 由 $\left(ex_1\right)^{x_2}=\left(ex_2\right)^{x_1}$ ，两边取对数，得 $x_2\ln\left(ex_1\right)=x_1\ln\left(ex_2\right)$ ， 6分

即 $x_2\left(\ln x_1+1\right)=x_1\left(\ln x_2+1\right)$ ，所以 $\dfrac{\ln x_1+1}{x_1}=\dfrac{\ln x_2+1}{x_2}$ ，

此即当$a=1$时，存在$x_1>0,x_2>0$，$x_1\neq x_2$，满足$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$.

解法1：由（1）可知，当$a=1$时,$f(x)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，

不妨令$x_1<x_2$，所以$x_1\in\left(0,1\right),x_2\in\left(1,+\infty\right)$. 7分

①若$x_2\in\left[2,+\infty\right)$，则$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}>x_2^{\ 2}\geq 4>2$显然成立. 8分

【注：亦可讨论，$x_2\in\left[\sqrt{2},+\infty\right)$，则$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}>x_2^{\ 2}\geq 2$.】【强化特例、容易优先原则】

②若$x_2\in\left(1,2\right)$，则$2-x_2\in\left(0,1\right)$，

记$g\left(x\right)=f\left(x\right)-f\left(2-x\right)=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln\left(2-x\right)}{2-x}-\dfrac{1}{2-x},0<x<1$，

所以$g'\left(x\right)=-\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{\ln\left(2-x\right)}{\left(2-x\right)^2}>-\dfrac{\ln x}{x^2}-\dfrac{\ln\left(2-x\right)}{x^2}=-\dfrac{\ln\left[-\left(x-1\right)^2+1\right]}{x^2}>0$，. . . 9分

所以$g\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，所以$g\left(x\right)<g\left(1\right)=0$，即$f\left(x\right)<f\left(2-x\right)$，

所以$f\left(2-x_1\right)>f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$. 10分

因为$x_1\in\left(0,1\right)$，所以$2-x_1>1$, 又$x_2>1$，$f(x)$在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，

所以$2-x_1<x_2$，即$x_1+x_2>2$. 11分

又$x_1^{\ 2}+1\geq 2\sqrt{x_1^{\ 2}\cdot 1}=2x_1,x_2^{\ 2}+1\geq 2\sqrt{x_2^{\ 2}}=2x_2$，以上两式左右两端分别相加，

得$x_1^{\ 2}+1+x_2^{\ 2}+1\geq 2\left(x_1+x_2\right)$，即$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}\geq 2\left(x_1+x_2\right)-2>2$. 12分

综合①②，证得$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}>2$.

解法2：由（1）可知，当$a=1$时,$f(x)$在$\left(0,1\right)$上单调递增，在$\left(1,+\infty\right)$上单调递减，

所以$f(x)\leq f(1)=1$.

当$x\in\left(1,+\infty\right)$时，$f\left(x\right)=\dfrac{\ln x+1}{x}>0$；

由于$f\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$，故$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$上恒有$f(x)>0$. 7分

不妨令$x_1<x_2$，记$f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=m$,则$m\in\left(0,1\right)$，且$\ln x_1+1=mx_1,\ln x_2+1=mx_2$，

以上两式相减得，$\ln\dfrac{x_2}{x_1}=m\left(x_2-x_1\right)$，

记 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，由 $x_1<x_2$，知 $t\in\left(1,+\infty\right)$，

$x_1=\dfrac{\ln t}{m\left(t-1\right)}$, $x_2=\dfrac{t\ln t}{m\left(t-1\right)}$, 故 $x_1+x_2=\dfrac{\left(1+t\right)\ln t}{m\left(t-1\right)}$. 8分

记 $g\left(t\right)=\ln t-\dfrac{2m\left(t-1\right)}{t+1}\left(t>1\right)$，$g'\left(t\right)=\dfrac{\left(t+1\right)^2-4m}{t\left(t+1\right)^2}$， 9分

又 $\left(t+1\right)^2>4$, $4m<4$, 所以 $g'\left(t\right)>0$. 10分

所以 $g(t)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $g(t)>g(1)=0$,

所以 $\ln t-\dfrac{2m\left(t-1\right)}{t+1}>0$, 可知 $x_1+x_2=\dfrac{\left(1+t\right)\ln t}{m\left(t-1\right)}>2$. 11分

即 $x_1{}^2+x_2{}^2\geq\dfrac{(x_1+x_2)^2}{2}>\dfrac{4}{2}=2$. 12分