

数学试题

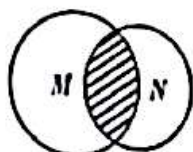
本试卷共 5 页。全卷满分 150 分,考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、单选题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $M = \{x | y = \ln(x-2)\}$, $N = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, 则图中阴影部分表示的集合为
 A. $(-4, 2)$ B. $(2, 4)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$



(第1题图)

2. 双曲线 $C: \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的焦点 F 到 C 的渐近线的距离为
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$, 其前 n 项和为 S_n , 若 $S_1 = S_{25}$, $a_3 + a_8 = 32$, 则 $S_{16} =$
 A. 80 B. 160 C. 176 D. 198

4. 故宫是世界上现存规模最大、保存最为完整的木质结构古建筑群。故宫宫殿房檐设计恰好使北房在冬至前后阳光满屋,夏至前后屋檐遮阴。已知北京地区夏至前后正午太阳高度角约为 75° ,冬至前后正午太阳高度角约为 30° 。图 1 是顶部近似为正四棱锥、底部近似为正四棱柱的宫殿,图 2 是其示意图,则其出檐 AB 的长度(单位:米)约为



图 1

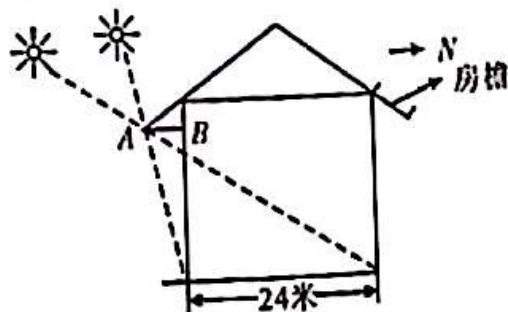


图 2

(第4题图)

- A. 3 B. 4 C. $6(\sqrt{3}-1)$ D. $3(\sqrt{3}+1)$
5. $\triangle ABC$ 中, $CA = 2$, $CB = 4$, D 为 CB 的中点, $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EA}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CE} =$
 A. 0 B. 2 C. -2 D. -4

6. 福建省采用“3+1+2”新高考模式,其中“3”为全国统考科目语文、数学和外语;“1”为考生在物理和历史中选择一门;“2”为考生在思想政治、地理、化学和生物四门中再选择两门.某中学调查了高一年级学生的选科倾向,随机抽取 200 人,其中选考物理的 120 人,选考历史的 80 人,统计各选科人数如下表:

选择科目 选考类别	思想政治	地理	化学	生物
物理类	35	50	90	65
历史类	50	45	30	35

- A. 物理类的学生中选择地理的比例比历史类的学生中选择地理的比例高
 B. 物理类的学生中选择生物的比例比历史类的学生中选择生物的比例低
 C. 有 90% 以上的把握认为选择生物与选考类别有关
 D. 没有 95% 以上的把握认为选择生物与选考类别有关

$$\text{附: } K^2 = \frac{(a+b+c+d)(ad-bc)^2}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}$$

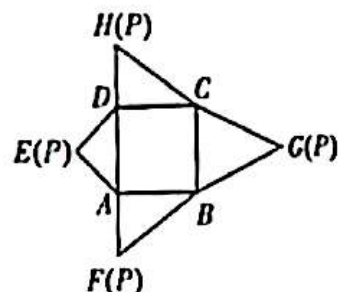
$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

7. 已知函数 $f(x) = x^2 - x - a \sin \pi x + 1$ 有且仅有一个零点,则实数 $a =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 2

8. 如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 的平面展开图中,四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, $\triangle ADE$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形, $\angle HDC = \angle FAB = 90^\circ$,则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心到面 PBC 的距离为

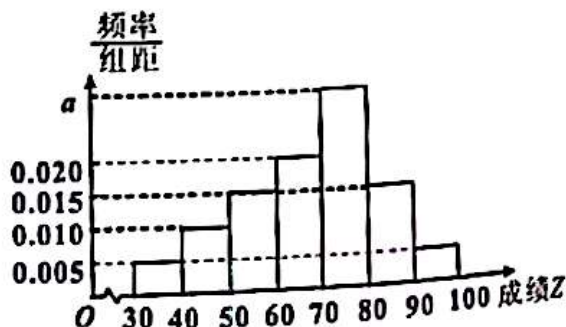
- A. $\frac{\sqrt{30}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{6}$



(第8题图)

- 二、多选题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的四个选项中,有多个选项符合题目要求,全部选对的得 5 分,选对但不全的得 2 分,有选错的得 0 分.

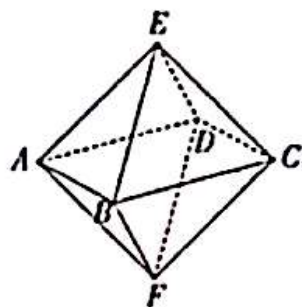
9. 记考试成绩 Z 的均值为 μ ,方差为 σ^2 ,若 Z 满足 $0.66 < P(\mu - \sigma < Z < \mu + \sigma) < 0.70$,则认为考试试卷设置合理.在某次考试后,从 20000 名考生中随机抽取 1000 名考生的成绩进行统计,得到成绩的均值为 63.5,方差为 169,将数据分成 7 组,得到如图所示的频率分布直方图.用样本估计总体,则



(第9题图)

- A. 本次考试成绩不低于 80 分的考生约为 5000 人
 B. $a = 0.03$
 C. 本次考试成绩的中位数约为 70
 D. 本次考试试卷设置合理

10. 连接正方体每个面的中心构成一个正八面体(如图), 则



(第10题图)

A. 以正八面体各面中心为顶点的几何体为正方体

B. 直线 AE 与 CF 是异面直线

C. 平面 $ABF \perp$ 平面 ABE

D. 平面 $ABF \parallel$ 平面 CDE

11. 已知抛物线 $C: y^2 = 6x$ 的焦点为 F , 直线 l 与 C 交于点 A, B (A 在第一象限), 以 AB 为直径的圆 E 与 C 的准线相切于点 D . 若 $|AD| = \sqrt{3}|BD|$, 则

A. A, B, F 三点共线

B. l 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $|AF| = 3|BF|$

D. 圆 E 的半径是 6

12. 已知正数 a, b 满足 $a + b = 3$, 则

A. $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq 9$

B. $\frac{1}{a}(b + \frac{3}{b}) \geq 2$

C. $\ln a \cdot \ln b < \frac{1}{4}$

D. $2e^a + e^{2a} > 21$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 是偶函数, 则 $f(\frac{\pi}{6}) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

14. $(x-1)(x-\frac{2}{\sqrt{x}})^6$ 展开式中的常数项为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$ (用数字作答).

15. 若复数 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, i$ 为虚数单位) 满足 $|z - 2i| = |z|$, 写出一个满足条件的复数 $z = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 2, & x < 0, \\ xe^{x-1} + 2, & x \geq 0. \end{cases}$ 若 $f(x) \geq 2|x - a|$, 则实数 a 的取值范围是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = a_n - 2$, 其中 $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 求证: $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{2a_n}{S_n S_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{1}{2}$.

18. (12 分)

锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 满足 $\sqrt{3}b\sin C + \sqrt{3}c\sin B = 4a\sin B\sin C$.

(1) 求 A ;

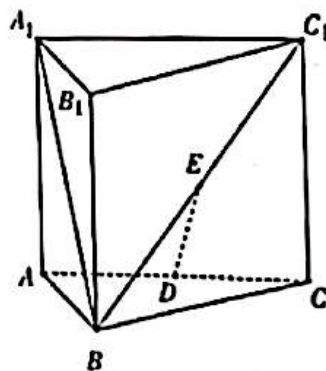
(2) 若 $b=4$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, 求 AD .

19. (12 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D 是 AC 上一点, E 是 BC_1 的中点, 且 $DE \parallel$ 平面 ABB_1A_1 .

(1) 证明: $DA = DC$;

(2) 若 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $AA_1 = AC = \sqrt{2}AB$, 求直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值.



(第19题图)

20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{2}$, 且过点 $P(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 过 C 的右焦点的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, C 上一点 M 满足 $\overrightarrow{OA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}$.

求 $|OM|$.

21. (12 分)

每天锻炼一小时,健康工作五十年,幸福生活一辈子.某公司组织全员每天进行体育锻炼,订制了主题为“百年风云”的系列纪念币奖励员工,该系列纪念币有 A_1, A_2, A_3, A_4 四种.每个员工每天自主选择“球类”和“田径”中的一项进行锻炼.锻炼结束后员工将随机等可能地获得一枚纪念币.

(1)某员工活动前两天获得 A_1, A_4 ,则前四天恰好能集齐“百年风云”系列纪念币的概率是多少?

(2)通过抽样调查发现:活动首日有 $\frac{3}{4}$ 的员工选择“球类”,其余的员工选择“田径”;

在前一天选择“球类”的员工中,次日会有 $\frac{1}{3}$ 的员工继续选择“球类”,其余的选择“田径”;

在前一天选择“田径”的员工中,次日会有 $\frac{1}{2}$ 的员工继续选择“田径”,其余的选择“球类”.

用频率估计概率.记某员工第 n 天选择“球类”的概率为 P_n .

①计算 P_1, P_2 , 并求 P_n ;

②该集团公司共有员工 1400 人,经过足够多天后,试估计该公司接下来每天各有多少员工参加“球类”和“田径”运动?

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = 2ax - \ln(x+1) + 1, a \in \mathbb{R}$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)当 $x > 0, 0 < a \leq 1$ 时,求证: $e^x > f(x)$.

厦门市 2021 届高三毕业班第三次质量检测

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. B 2. D 3. B 4. C 5. A 6. D 7. B 8. C

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. BC 10. AD 11. AC 12. BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\frac{1}{2}$ 14. -240 15. $a+i$ (a 可为任意实数，例如：1+i) 16. $[-\frac{1}{2}, \frac{7}{16}]$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 本题考查等比数列的定义，前 n 项和等基础知识；考查运算求解，推理论证能力；考查化归与转化思想等；本题满分 10 分。

【解析】(1) 因为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = a_n - 2$ ，所以 $S_n = 2a_n - 2$ ， $n \geq 2$ ，

所以 $\begin{cases} S_n = 2a_n - 2 \\ S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2 \end{cases}$ ， $n \geq 3$ ，得到： $a_n = 2a_{n-1}$ ， $n \geq 3$ 1 分

又因为 $a_1 = 2$ ，由 $a_1 = a_2 - 2$ ，得到 $a_2 = 4 = 2a_1$ ，

所以得到 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ ($n \geq 2$) 为定值， 2 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，以 2 为公比的等比数列， 3 分

所以 $a_n = 2^n$ ， 4 分

$S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} - 2$ 5 分

(2) 因为 $b_n = \frac{2a_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}} = \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n S_{n+1}} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}}$ ，

所以 $b_n = \frac{1}{2^{n+1} - 2} - \frac{1}{2^{n+2} - 2}$ ， 7 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

$$= (\frac{1}{2^2 - 2} - \frac{1}{2^3 - 2}) + (\frac{1}{2^3 - 2} - \frac{1}{2^4 - 2}) + \cdots + (\frac{1}{2^{n+1} - 2} - \frac{1}{2^{n+2} - 2})$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2} - 2}. \text{ 9 分}$$

因为 $n \geq 1$ ，所以 $\frac{1}{2^{n+2} - 2} > 0$ ，所以 $T_n < \frac{1}{2}$ 10 分

18. 本题考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式和三角恒等变换等基础知识；考查运算求解、推理论证能力；考查数形结合、化归与转化思想等。本题满分 12 分。

【解析】解法一：

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,1 分

因为 $\sqrt{3}b \sin C + \sqrt{3}c \sin B = 4a \sin B \sin C$,

所以 $\sqrt{3} \sin B \sin C + \sqrt{3} \sin C \sin B = 4 \sin A \sin B \sin C$,2 分

又因为 $\sin B \sin C \neq 0$,3 分

所以 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$,4 分

又因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$5 分

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}$,6 分

解得 $c = 3$,7 分

因为 $\angle BAC$ 的角平分线为 AD , 所以 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{\pi}{6}$,

又因为 $S_{\triangle BAD} + S_{\triangle CAD} = S_{\triangle BAC}$,

所以 $\frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$,10 分

所以 $\frac{7}{4}AD = 3\sqrt{3}$, 所以 $AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}$12 分

解法二：

(1) 同解法一；5 分

(2) 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{3}$,6 分

解得 $c = 3$,7 分

由 $\frac{BD}{CD} = \frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle CAD}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{\frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD} = \frac{AB}{AC}$ 得, $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b} = \frac{3}{4}$,7 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \frac{\pi}{3}$, 所以 $a = \sqrt{13}$, $CD = \frac{4}{7}a = \frac{4\sqrt{13}}{7}$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{13+16-9}{2 \times 4 \times \sqrt{13}}$, 在 $\triangle ACD$ 中, $\cos C = \frac{16 + \left(\frac{4\sqrt{13}}{7}\right)^2 - AD^2}{2 \times 4 \times \frac{4\sqrt{13}}{7}}$,

$$\text{所以 } \frac{16 + \left(\frac{4\sqrt{13}}{7}\right)^2 - AD^2}{2 \times 4 \times \frac{4\sqrt{13}}{7}} = \frac{13+16-9}{2 \times 4 \times \sqrt{13}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{得 } AD^2 = \frac{16 \times 27}{49}, \text{ 所以 } AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法三:

(1) 同解法一; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

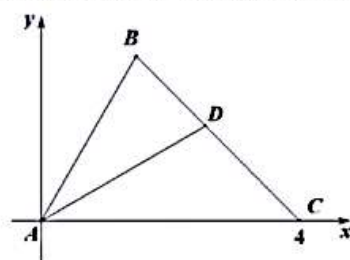
(2) 以点 A 为坐标原点, AC 所在直线为 x 轴, 建立直角坐标系,

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}c = 3\sqrt{3}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } c = 3. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } C(4,0), B\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\text{设 } AD = m, \text{ 又 } \angle DAC = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m, \frac{1}{2}m\right),$$



又因为 B, C, D 三点共线, 所以 $k_{BC} = k_{BD}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{所以 } \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - 4} = \frac{\frac{1}{2}m}{\frac{\sqrt{3}}{2}m - 4}, \text{ 解得 } m = \frac{12\sqrt{3}}{7}, \text{ 即 } AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 本题考查直线与平面平行, 平面与平面平行, 直线与平面垂直、平面与平面垂直、二面角、空间向量等基础知识; 考查空间想象、运算求解、推理论证能力; 考查数形结合思想、化归与转化思想等. 本题满分 12 分.

【解析】解法一:

(1) 证明: 连接 CB_1, AB_1 , 因为四边形 BCC_1B_1 是平行四边形, $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

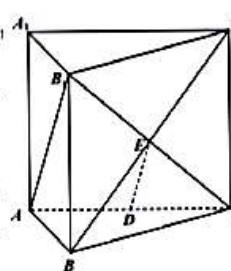
所以 C, E, B_1 三点共线, 且 E 是 CB_1 中点, $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为平面 $AB_1C \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = AB_1$,

且 $DE \parallel$ 平面 ABB_1A_1 , $DE \subset$ 平面 AB_1C , $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以 $DE \parallel AB_1$, $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以 D 是 CA 中点, 即 $DA = DC$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



(2) 因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $BB_1 \perp BA$, $BB_1 \perp BC$, $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

因为平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BB_1$, 所以 $\angle ABC$ 是二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角,

因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

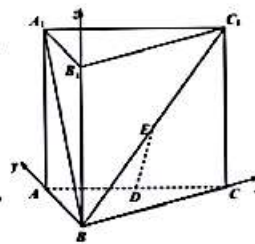
所以 BA, BC, BB_1 两两垂直,

以 B 为坐标原点, 以 $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB_1}$ 为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系如图, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

因为 $AC = \sqrt{2}AB$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $BA = BC$, 设 $AC = 2$, 则

$$B(0,0,0), C(\sqrt{2},0,0), C_1(\sqrt{2},0,2), A(0,\sqrt{2},0), A_1(0,\sqrt{2},2), \\ D(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), E(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1),$$

所以 $\overrightarrow{DE} = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $\overrightarrow{BC_1} = (\sqrt{2}, 0, 2)$, $\overrightarrow{BA_1} = (0, \sqrt{2}, 2)$,



.. 9 分

设平面 A_1BC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{BC_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BA_1} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{2}x + 2z = 0, \\ \sqrt{2}y + 2z = 0, \end{cases}$

取 $x = \sqrt{2}$, 得 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1)$, 10 分

设直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DE}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{DE}| |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ 12 分

【若以 D 为坐标原点, $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}$ 为 x, y 轴正方向建立空间直角坐标系, 设 $AC = 2$,

则 $D(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $C_1(0,1,2)$, $A(0,-1,0)$, $A_1(0,-1,2)$, $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$,

得 $\overrightarrow{DE} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{BA_1} = (-1, -1, 2)$, 平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, 0, 1)$ 】

解法二:

(1) 同解法一; 5 分

(2) 因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $BB_1 \perp BA$, $BB_1 \perp BC$, 6 分

因为平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BB_1$, 所以 $\angle ABC$ 是二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角,

因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 7 分

取 A_1C_1 中点 F , 连接 BF , DF , 则 $DF \parallel AA_1$, 又 $AA_1 \parallel BB_1$, 所以 $DF \parallel BB_1$,
所以 $DF \perp$ 平面 ABC , 所以 $DF \perp AC$,

因为 $AC = \sqrt{2}AB$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $BA = BC$, 所以 $BD \perp AC$,

又 $BD \cap DF = D$, 所以 $AC \perp$ 平面 BDF , 8 分

在 $\triangle BDF$ 中, 过 D 作 $DH \perp BF$ 交 BF 于点 H , 连接 EH ,

则 $AC \perp DH$, 因为 $AC \parallel A_1C_1$, 所以 $DH \perp A_1C_1$,

又 $BF \cap A_1C_1 = F$, 所以 $DH \perp$ 平面 A_1BC_1 , 9 分

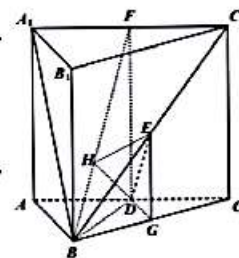
所以 EH 为 DE 在平面 A_1BC_1 内的射影,

所以 $\angle DEH$ 为直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角, 10 分

取 BC 中点 G , 连接 DG, EG , 则 $EG \parallel CC_1$, 又 $CC_1 \parallel BB_1$, 所以 $EG \parallel BB_1$,
所以 $EG \perp$ 平面 ABC , 所以 $EG \perp DG$,

设 $AC = 2a$, 在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中, 可得 $DE = \frac{\sqrt{6}a}{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中, 可得 $DH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$, 11 分



.. 8 分

.. 9 分

.. 10 分

所以在 $\text{Rt}\triangle DHE$ 中, 可得 $\sin \angle DEH = \frac{DH}{DE} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$.

所以直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ 12 分

解法三:

(1) 同解法一; 5 分

(2) 因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC , 所以 $BB_1 \perp BA$, $BB_1 \perp BC$, 6 分

因为平面 $ABB_1A_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = BB_1$, 所以 $\angle ABC$ 是二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角,

因为平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 7 分

取 A_1C_1 中点 F , 连接 BF , DF , 则 $DF \parallel AA_1$, 又 $AA_1 \parallel BB_1$, 所以 $DF \parallel BB_1$,
所以 $DF \perp$ 平面 ABC , 所以 $DF \perp AC$,

因为 $AC = \sqrt{2}AB$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, 所以 $BA = BC$, 所以 $BD \perp AC$,

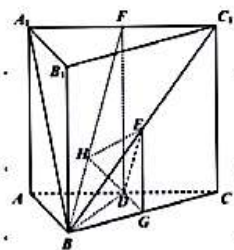
又 $BD \cap DF = D$, 所以 $AC \perp$ 平面 BDF ,

因为 $A_1C_1 \parallel AC$, 所以 $A_1C_1 \perp$ 平面 BDF , 8 分

设 D 在平面 A_1BC_1 的射影为 H ,

设 $AC = 2a$, 由 $V_{D-A_1BC_1} = V_{A_1-BDF} + V_{C_1-BDF}$, 9 分

得 $DH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$, 10 分



取 BC 中点 G , 连接 DG, EG , 则 $EG \parallel CC_1$, 又 $CC_1 \parallel BB_1$, 所以 $EG \parallel BB_1$,
所以 $EG \perp$ 平面 ABC , 所以 $EG \perp DG$,

设 $AC = 2a$, 在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中, 可得 $DE = \frac{\sqrt{6}a}{2}$, 11 分

设直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{DH}{DE} = \frac{2\sqrt{30}}{15}$.

所以直线 DE 与平面 A_1BC_1 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{30}}{15}$ 12 分

20. 本题考查直线的方程、直线与椭圆的位置关系等知识; 考查运算求解能力、推理论证能力等; 考查数形结合思想、化归与转化思想等. 本题满分 12 分.

【解析】解法一:

(1) 设焦距为 $2c$, 则 $c = \sqrt{2}$, 1 分

设椭圆左右焦点为 F_1, F_2 . 则 $|PF_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $|PF_1| = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 2 分

则 $2a = |PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{3}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 3 分

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 4 分

(2) 由 $\overrightarrow{OA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}$ 得 $\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OM}$, 5 分

①当直线 $l: y = 0$ 时, $|BA| = 2\sqrt{3}$, $|OM| = \sqrt{3}$, 舍去; 6 分

②设直线 $l: x = my + \sqrt{2}$, 直线 $OM: x = my$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x = my + \sqrt{2} \end{cases}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{得: } (m^2 + 3)y^2 + 2\sqrt{2}my - 1 = 0, \Delta = 12(m^2 + 1) > 0,$$

$$\text{由韦达定理得: } y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2 + 3}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{2\sqrt{3}(m^2 + 1)}{m^2 + 3}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x = my \end{cases}, \text{解得 } y^2 = \frac{3}{m^2 + 3},$$

$$\text{得到 } |OM| = \sqrt{1+m^2} |y_M - 0| = \sqrt{\frac{3(m^2 + 1)}{m^2 + 3}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{依题意得 } \frac{|AB|^2}{|OM|^2} = \frac{12(m^2 + 1)^2}{(m^2 + 3)^2} \cdot \frac{m^2 + 3}{3(m^2 + 1)} = \frac{16}{9}, \text{解得: } m^2 = \frac{3}{5}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |OM| = \sqrt{\frac{3(m^2 + 1)}{m^2 + 3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二:

$$(1) \text{ 设焦距为 } 2c, \text{ 则 } c = \sqrt{2}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{点 } P(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ 在椭圆上, 有 } \frac{2}{a^2} + \frac{1}{3b^2} = 1, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } b^2 = 1, a^2 = 3, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ ①当直线 } l: y = 0 \text{ 时, } |BA| = 2\sqrt{3}, |OM| = \sqrt{3}, \text{ 舍去; } \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{②设直线 } l: x = my + \sqrt{2}, \text{ 直线 } OM: x = my, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x = my + \sqrt{2} \end{cases}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{得到: } (m^2 + 3)y^2 + 2\sqrt{2}my - 1 = 0, \Delta = 12(m^2 + 1) > 0,$$

$$\text{由韦达定理得: } y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = \frac{-1}{m^2 + 3}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

又 $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, 则点 $M\left(\frac{3}{4}(x_1 - x_2), \frac{3}{4}(y_1 - y_2)\right)$, 8 分

又 M 在椭圆 C 上, 则 $\frac{(x_1 - x_2)^2}{3} + (y_1 - y_2)^2 = \frac{16}{9}$,

化简得: $3(x_1^2 + 3y_1^2) + 3(x_2^2 + 3y_2^2) - 6(x_1x_2 + 3y_1y_2) = 16$,

即 $x_1x_2 + 3y_1y_2 = \frac{1}{3}$, 9 分

$x_1x_2 + 3y_1y_2 = (my_1 + \sqrt{2})(my_2 + \sqrt{2}) + 3y_1y_2 = (m^2 + 3)y_1y_2 + \sqrt{2}m(y_1 + y_2) + 2 = -1 - \frac{4m^2}{m^2 + 3} + 2 = \frac{1}{3}$,

解得 $m^2 = \frac{3}{5}$ 10 分

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \\ x = my \end{cases}$, 解得 $y^2 = \frac{3}{m^2 + 3}$, 11 分

所以 $|OM| = \sqrt{1 + m^2} |y_M - 0| = \sqrt{\frac{3(m^2 + 1)}{m^2 + 3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 12 分

21. 本题考查离散型随机变量分布列及其期望、样本估计总体等知识; 考查学生的阅读理解能力、数据处理能力和运算求解能力; 考查统计与概率思想、化归与转化思想和应用意识. 本题满分 12 分.

【解析】(1) 设事件 E 为: “他恰好能集齐这四枚纪念币”, 1 分

由题意, 基本事件总数有 $N = 4 \times 4 = 16$ 个, 2 分

事件 E 包含基本事件的个数为 $n = 2 \times 1 = 2$ 个, 3 分

所以他恰好能集齐这四枚纪念币的概率 $P(E) = \frac{n}{N} = \frac{1}{8}$ 4 分

(2) ①由题可知: $P_1 = \frac{3}{4}$, 5 分

$P_2 = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{2}(1 - P_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}P_1$, 所以 $P_2 = \frac{3}{8}$ 6 分

当 $n \geq 2$ 时, $P_n = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - P_{n-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}P_{n-1}$, 7 分

所以 $P_n - \frac{3}{7} = -\frac{1}{6}\left(P_{n-1} - \frac{3}{7}\right)$,

又因为 $P_1 - \frac{3}{7} = \frac{9}{28}$, 即 $\left\{P_n - \frac{3}{7}\right\}$ 是以 $\frac{9}{28}$ 为首项, 以 $-\frac{1}{6}$ 为公比的等比数列. 8 分

所以 $P_n - \frac{3}{7} = \frac{9}{28} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$, 所以 $P_n = \frac{3}{7} + \frac{9}{28} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ 9 分

②依题意得, 当 n 足够大时, 选择“球类”的概率近似于 $\frac{3}{7}$, 10 分

假设用 ξ 表示一天中选择“球类”的人数, 则 $\xi \sim B\left(1400, \frac{3}{7}\right)$,

所以 $E\xi = 1400 \times \frac{3}{7} = 600$ 11 分

即选择“球类”的人数的期望为 600, 选择“田径”的人数的期望为 800. 12 分

22. 本题考查函数的单调性、导数及其应用、不等式等基础知识; 考查推理论证能力、运算求解能力; 考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想等. 本题满分 12 分.

【解析】解法一:

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$, 1 分

$f'(x) = 2a - \frac{1}{x+1}$, 2 分

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减; 3 分

②当 $a > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2ax + 2a - 1}{x+1}$,

由 $f'(x) > 0$ 解得 $x > \frac{1-2a}{2a}$, 由 $f'(x) < 0$ 解得 $-1 < x < \frac{1-2a}{2a}$,

即 $f(x)$ 在 $(-1, \frac{1-2a}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1-2a}{2a}, +\infty)$ 上单调递增; 4 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-1, \frac{1-2a}{2a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1-2a}{2a}, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

(2) $e^x > f(x)$ 即 $e^x - 2ax + \ln(x+1) - 1 > 0$,

令 $g(x) = e^x - 2ax + \ln(x+1) - 1$, $x \geq 0$, 则 $g'(x) = ae^x + \frac{1}{x+1} - 2a$, 6 分

令 $h(x) = ae^x + \frac{1}{x+1} - 2a$, 则 $h'(x) = a^2e^x - \frac{1}{(x+1)^2}$,

令 $\varphi(x) = a^2e^x - \frac{1}{(x+1)^2}$, $\varphi'(x) = a^3e^x + \frac{2}{(x+1)^3} > 0$,

即 $h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 又 $h'(0) = a^2 - 1$, 7 分

① $a = 1$ 时, $h'(0) = 0$, 则 $h'(x) > 0$ 恒成立, 即 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

则有 $h(x) > h(0) = 2 - 2 = 0$; 8 分

②当 $0 < a < 1$ 时, $h'(0) = a^2 - 1 < 0$,

$$h'(x) = a^2 e^{ax} - \frac{1}{(x+1)^2} > a^2 e^{ax} - 1, \text{ 则有 } h'(\frac{-2\ln a}{a}) > 1 - 1 > 0, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{即存在 } x_0 > 0 \text{ 使得 } h'(x_0) = 0, \text{ 即 } a^2 e^{ax_0} = \frac{1}{(x_0+1)^2}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

且 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } h(x) \geq h(x_0) = ae^{ax_0} + \frac{1}{x_0+1} - 2a = ae^{ax_0} + \sqrt{a^2 e^{ax_0}} - 2a = a(e^{ax_0} + e^{\frac{ax_0}{2}} - 2) > 0,$$

$$\text{即 } h(x) \geq 0; \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上所述, $h(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{所以 } g(x) > g(0) = 0, \text{ 即 } e^{ax} > f(x). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二: (1) 同解法一; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) \text{ 设 } g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1, \quad x \geq 0, \quad g'(x) = e^x - x - 1,$$

由(1)可知, $h(x) = x - \ln(x+1) + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{且 } h(x) > h(0) = 1, \text{ 即 } x > \ln(x+1), \text{ 即 } e^x > x+1, \quad x > 0,$$

即 $g'(x) > 0$ 恒成立, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

$$\text{所以 } g(x) > g(0) = 0, \text{ 即 } e^x > \frac{1}{2}x^2 + x + 1, \quad x > 0. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } e^{ax} > \frac{1}{2}a^2x^2 + ax + 1,$$

$$\text{要证 } e^{ax} > f(x) \text{ 只需证 } \frac{1}{2}a^2x^2 + ax + 1 > f(x),$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{1}{2}a^2x^2 - ax + \ln(x+1), \quad x > 0, \quad 0 < a \leq 1, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$h'(x) = a^2x - a + \frac{1}{x+1} = \frac{a^2x^2 + (a^2 - a)x - (a-1)}{x+1},$$

$$\text{又 } \Delta = (a^2 - a)^2 + 4a^2(a-1) = a^2(a-1)(a+3) \leq 0, \text{ 则 } h'(x) \geq 0, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{即 } h(x) \text{ 在在 } (0, +\infty) \text{ 单调递增, 即 } h(x) > h(0) = 0, \text{ 即 } e^{ax} > f(x). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法三: (1) 同解法一; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) \quad e^{ax} > f(x) \text{ 即 } e^{ax} - 2ax + \ln(x+1) - 1 > 0,$$

$$\text{令 } g(a) = e^{ax} - 2xa + \ln(x+1) - 1, \quad 0 < a \leq 1, \text{ 则 } g'(a) = xe^{ax} - 2x, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } g'(a) = 0 \text{ 得, } ax = \ln 2, \text{ 即 } a = \frac{\ln 2}{x}.$$

① $\frac{\ln 2}{x} \geq 1$, $0 < x \leq \ln 2$ 即时, $g'(a) \leq 0$, 即 $g(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

则有 $g(a) \geq g(1) = e^x - 2x + \ln(x+1) - 1$7 分

下证: $e^x - 2x + \ln(x+1) - 1 > 0$, $0 < x \leq \ln 2$ 即可;

设 $h(x) = e^x - 2x + \ln(x+1) - 1$, $h'(x) = e^x - 2 + \frac{1}{x+1}$,

设 $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{(x+1)^2} > 1 - \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, 即 $h'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 单调递增,

所以 $h'(x) > h'(0) = 0$, 即 $h(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 单调递增,

所以 $h(x) > h(0) = 0$9 分

② $\frac{\ln 2}{x} < 1$, $x > \ln 2$ 时, $g(a)$ 在 $(0, \frac{\ln 2}{x})$ 上单调递减, $(\frac{\ln 2}{x}, +\infty)$ 上单调递增,

则 $g(a) \geq g(\frac{\ln 2}{x}) = \ln(x+1) + 1 - 2\ln 2 = \ln \frac{e(x+1)}{4} \geq \ln \frac{e(\ln 2 + 1)}{4}$10 分

因为 $e^3 < 3^3 < 2^5$, 则有 $3 < 5\ln 2$, 即 $\ln 2 > \frac{3}{5}$,

所以 $\ln \frac{e(\ln 2 + 1)}{4} > \ln \frac{e(0.6 + 1)}{4} = \ln \frac{2e}{5} > \ln 1 = 0$, 即 $g(a) \geq 0$,

综上, 所以 $g(a) > 0$, 即 $e^{ax} > f(x)$12 分

解法四: (1) 同解法一;5 分

(2) 设 $t = ax > 0$, 则 $e^{ax} \geq f(x) \Leftrightarrow e^t \geq 2t - \ln(\frac{t}{a} + 1) + 1$,7 分

设 $g(a) = \ln(\frac{t}{a} + 1) + e^t - 2t - 1$, $0 < a \leq 1$,8 分

则有 $g(a) \geq g(1) = \ln(t+1) + e^t - 2t - 1$,9 分

下证: $\ln(t+1) + e^t - 2t - 1 > 0$.

由(1)可知, $h(x) = x - \ln(x+1) + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

且 $h(x) > h(0) = 1$, 即 $x > \ln(x+1)$, 即 $e^x > x+1$, $x > 0$,

则有 $h(e^t - 1) > h(t)$, 即 $e^t - t > t - \ln(t+1) + 1$,11 分

即 $\ln(t+1) + e^t - 2t - 1 > 0$, 即 $e^{ax} > f(x)$12 分