三明市2021年普通高中高三毕业班质量检测

数学试题

（考试时间：2021年5月3日下午15：00—17：00　　满分：150分）

注意事项：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的姓名、准考证号．考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致．
2. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号．非选择题用0.5毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答．在试题卷上作答，答案无效．
3. 考试结束后，考生必须将本试卷和答题卡一并交回．

选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid -1<x<3\}$，$B=\{x\mid 2x-1<0\}$．则 $A\cap B=$

A. $\left\{x\middle|-1<x<-\frac{1}{2}\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-1<x<\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<3\right\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<3\right\}$

2. 已知 i 为虚数单位，若复数 z 满足 $|z|-z=2+4i$，则 z 在复平面内对应的点的坐标为

A. $(3,4)$　　B. $(-3,4)$　　C. $(3,-4)$　　D. $(-3,-4)$

3. 某市长期追踪市民的经济状况，依照订立的标准将市民分为高收入和低收入两类．统计数据表明该市高收入市民人口一直是低收入市民人口的两倍，且高收入市民中每年有40%会转变为低收入市民．那么该市每年低收入市民中转变为高收入市民的百分比是

A. 60%　　B. 70%　　C. 80%　　D. 90%

4. $(1+2x)\left(x^2-2\right)^5$ 展开式中 x^5 的系数为

A. -160　　B. -80　　C. 80　　D. 160

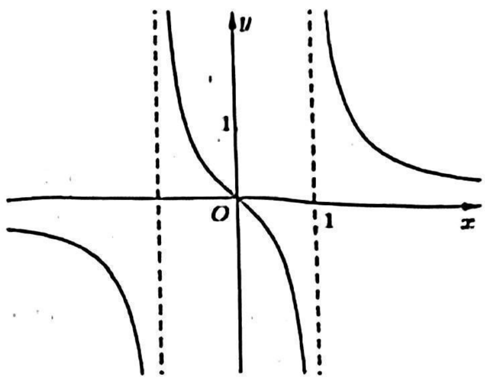
5. 若函数 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能是

A. $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

B. $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

C. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

D. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$



6. “干支纪年法”是中国历法上使用的纪年方法．甲，乙，丙，丁，戊，己，庚，辛，壬，癸被称为“十天干”，子，丑，寅，卯，辰，巳，午，未，申，酉，戌，亥被称为“十二地支”．“天干”以“甲”字开始，“地支”以“子”字开始，两者按干支顺序相配，其相配顺序为：甲子，乙丑，……，癸酉，甲戌，乙亥，……，壬戌，癸亥，甲子，……，周而复始，循环记录，此为干支纪年法．十三届全国人大四次会议审查的《国民经济和社会发展第十四个五年规划和2035年远景目标纲要(草案)》提出，展望2035年，中国将基本实现社会主义现代化．已知1901年是“干支纪年法”中的辛丑年，那么2035年是“干支纪年法”中的

A．甲寅年　　B．乙卯年　　C．丙辰年　　D．丁巳年

7．某市原来都开小车上班的郭先生统计了过去一年每一工作日的上班通行时间，并进行初步处理，得到频率分布表如下（T 表示通行时间，单位为分钟）：

通行时间	$15\leqslant T<20$	$20\leqslant T<25$	$25\leqslant T<30$	$30\leqslant T<35$	$35\leqslant T\leqslant 40$
频　　率	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

该市号召市民尽量减少开车出行，以绿色低碳的出行方式支持节能减排．郭先生积极响应政府号召，准备每天从骑自行车和开小车两种出行方式中随机选择一种．如果郭先生选择骑自行车，当天上班的通行时间为30分钟．将频率视为概率，根据样本估计总体的思想，对郭先生上班通行时间的判断，以下正确的是

A．开小车出行的通行时间的中位数为27.5分钟

B．开小车出行两天的总通行时间少于40分钟的概率为0.01

C．选择骑自行车比开小车平均通行时间至少会多耗费5分钟

D．若选择骑自行车和开小车的概率相等，则平均通行时间为28.5分钟

8．在三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 SA，SB，SC 两两垂直，且 $SA+SB=SC=2$．设 $SA=x$，该三棱锥的表面积为函数 $y=f\left(x\right)$，以下判断正确的是

A．$f\left(x\right)$ 为常数　　B．$f\left(x\right)$ 有极小值

C．$f\left(x\right)$ 有极大值　　D．$f\left(x\right)$ 是单调函数

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 设 P 是 $\triangle OAB$ 内部（不含边界）的一点，以下可能成立的是

A. $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ B. $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$

C. $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ D. $\overrightarrow{OP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

10. 对于给定的异面直线 m，n，以下判断正确的是

A. 存在平面 α，使得 $m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$

B. 存在直线 l，使得 l 同时与 m，n 垂直且相交

C. 存在平面 α，β，使得 $m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，且 $\alpha//\beta$

D. 对于任意点 A，总存在过 A 且与 m，n 都相交的直线

11. 已知 $x>0$，$y>0$，且 $2x+y=1$，则 $\frac{x+1}{xy}$ 可能取的值有

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

12. 瑞士著名数学家欧拉在 1765 年证明了定理“三角形的外心、重心、垂心依次位于同一条直线上，且重心到外心的距离是重心到垂心距离的一半”，后人称这条直线为“欧拉线”．直线 l 与 y 轴及双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的三个不同交点构成集合 M，且 M 恰为某三角形的外心，重心，垂心所成集合．若 l 的斜率为 1，则该双曲线的离心率可以是

A. $\frac{\sqrt{26}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{10}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，则 $\cos 2\alpha=$________.

14. 若抛物线 $y=ax^2$ 上的点 $P(m,2)$ 到焦点的距离为 3，则 $a=$________.

15. 函数 $f\left(x\right)=\ln x+2x-6$ 零点的一个近似值为__________.（误差不大于 0.25）

备注：自然对数的底数 $e\approx2.72$.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{a_n-a_n^{\ 2}}$，则 a_2+a_{2021} 的最大值为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10分）

在① $\sin 2C=\sqrt{3}\cos C$，② $c(2+\cos B)=\sqrt{3}b\sin C$，③ $b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=0$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中的三角形存在，求该三角形的面积；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在 $\triangle ABC$，它的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $b=7$，$c=5$，__________?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

18．（12分）

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $\{b_n\}$ 为等比数列，满足 $a_1b_1=2$，$S_2=6$，$S_3=12$，$b_1+b_2=3$；

（1）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）设 $c_n=\dfrac{a_nb_n}{S_{n+1}}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

19．（12分）

如图1，在平面四边形 $ABCD$ 中，$BC=\sqrt{3}AB$，$CD=2AD$，且 $\triangle ABD$ 为等边三角形．设 E 为 AD 中点，连结 BE，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起，使点 A 到达平面 $BCDE$ 上方的点 P，连结 PC，PD，设 F 是 PC 的中点，连结 BF，如图2．

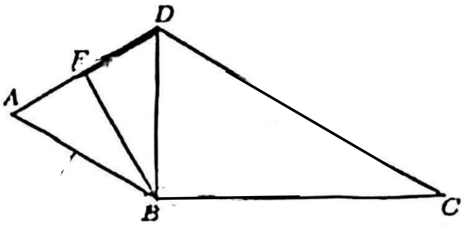


图1

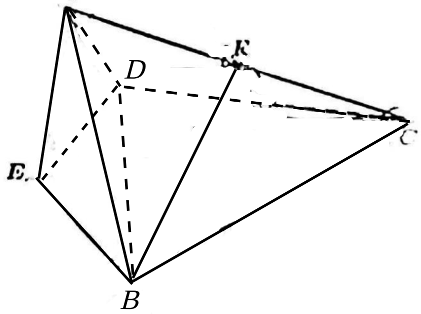


图2

（1）证明：$BF//$平面 PDE；

（2）若二面角 $P-BE-D$ 为 $60°$，设平面 PBC 与平面 PDE 的交线为 l，求 l 与平面 PCD 所成角的正弦值．

20.（12分）

双败淘汰制是一种竞赛形式，与普通的单败淘汰制输掉一场即被淘汰不同，参赛者只有在输掉两场比赛后才丧失争夺冠军的可能.

在双败淘汰制的比赛中，参赛者的数量一般是2的次方数，以保证每一轮都有偶数名参赛者．第一轮通过抽签，两人一组进行对阵，胜者进入胜者组，败者进入负者组．之后的每一轮直到最后一轮之前，胜者组的选手两人一组相互对阵，胜者进入下一轮，败者则降到负者组参加本轮负者组的第二阶段对阵；负者组的第一阶段，由之前负者组的选手（不包括本轮胜者组落败的选手）两人一组相互对阵，败者被淘汰（已经败两场），胜者进入第二阶段，分别对阵在本轮由胜者组中降组下来的选手，胜者进入下一轮，败者被淘汰．最后一轮，由胜者组最终获胜的选手（此前从未败过，记为A）对阵负者组最终获胜的选手（败过一场，记为B），若A胜则A获得冠军，若B胜则双方再次对阵，胜者获得冠军.

某围棋赛事采用双败淘汰制，共有甲、乙、丙等8名选手参赛．第一轮对阵双方由随机抽签产生，之后每一场对阵根据赛事规程自动产生对阵双方，每场对阵没有平局.

（1）设“在第一轮对阵中，甲、乙、丙都不互为对手”为事件M，求M的概率；

（2）已知甲对阵其余7名选手获胜的概率均为$\dfrac{2}{3}$，解决以下问题：

①求甲恰在对阵三场后被淘汰的概率；

②若甲在第一轮获胜，设甲在该项赛事的总对阵场次为随机变量ξ，求ξ的分布列.

21.（12分）

已知函数$f(x)=e^x+a(x+1)\ (a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）当$x\geqslant 0$时，$e^{mx}\geqslant\sin x-\cos x+2$，求实数$m$的取值范围.

22.（12分）

在平面直角坐标系xOy中，P是圆$E: x^2+y^2+2x-15=0$上的动点，已知$F(1,0)$，且线段PF的垂直平分线交PE于Q，设Q的轨迹为曲线C.

（1）求C的方程；

（2）设直线l与C交于A，B两点，若$M(1,\dfrac{3}{2})$，且$\triangle ABM$内切圆的圆心在直线FM上，则直线l具备以下哪个性质？证明你的结论.

①l恒过定点，②l的斜率恒为定值，③O到l的距离恒为定值.