

准考证号_____ 姓名_____.

(在此卷上答题无效)

2021 年 3 月福州市高中毕业班质量检测

数 学 试 题

注意事项:

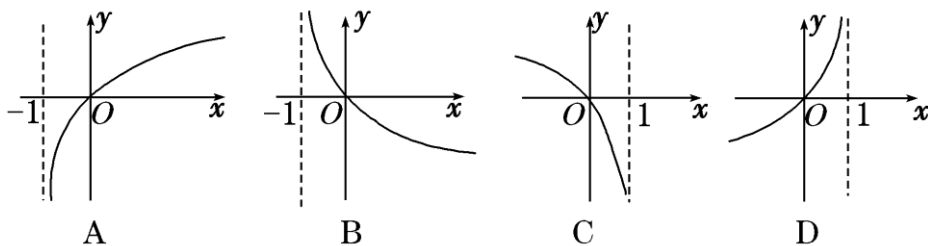
1. 答题前, 考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名. 考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致.
2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号. 第 II 卷用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答, 答案无效.
3. 考试结束, 考生必须将试题卷和答题卡一并交回.

第 I 卷

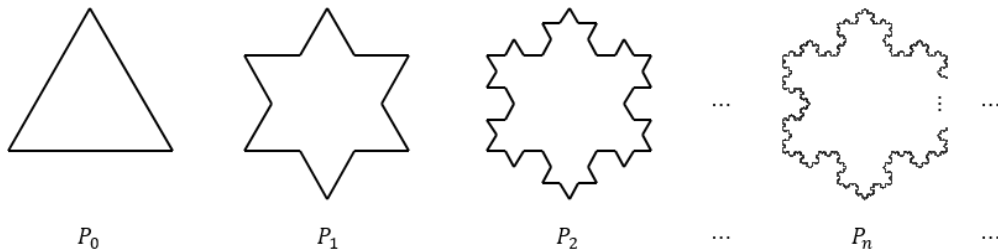
一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x | x = 2k + 1, k \in A\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{1, 3\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 3, 5\}$
2. 设复数 $z = a + bi$ ($a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}$), 则满足 $|z - 1| \leq 1$ 的复数 z 有
A. 7 个 B. 5 个 C. 4 个 D. 3 个
3. “ $m \leq 5$ ” 是 “ $m^2 - 4m - 5 \leq 0$ ” 的
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若抛物线 $y = mx^2$ 上一点 $(t, 2)$ 到其焦点的距离等于 3, 则
A. $m = \frac{1}{4}$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = 2$ D. $m = 4$

5. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ，则函数 $y = f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ 的图象大致为



6. 在 $\triangle ABC$ 中， E 为 AB 边的中点， D 为 AC 边上的点， BD ， CE 交于点 F ．若 $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$ ，则 $\frac{AC}{AD}$ 的值为
- A . 2 B . 3 C . 4 D . 5
7. 分形几何学是一门以不规则几何形态为研究对象的几何学．如图，有一列曲线 $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ ．已知 P_0 是边长为 1 的等边三角形， P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作而得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉 ($k = 0, 1, 2, \dots$)．记 P_n 的周长为 L_n 、所围成的面积为 S_n ．对于 $\forall n \in \mathbf{N}$ ，下列结论正确的是



- A. $\left\{\frac{S_n}{L_n}\right\}$ 为等差数列 B. $\left\{\frac{S_n}{L_n}\right\}$ 为等比数列
- C. $\exists M > 0$ ，使 $L_n < M$ D. $\exists M > 0$ ，使 $S_n < M$
8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $(0, 1)$ ，在区间 $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上为单调函数，把 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位长度后与原来的图象重合．设 $x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 且 $x_1 \neq x_2$ ，若 $f(x_1) = f(x_2)$ ，则 $f(x_1 + x_2)$ 的值为
- A . $-\sqrt{3}$ B . -1 C . 1 D . $\sqrt{3}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分．

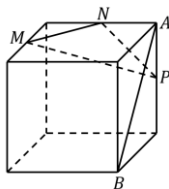
9. “一粥一饭，当思来之不易”，道理虽简单，但每年我国还是有 2 000 多亿元的餐桌浪费，被倒掉的食物相当于 2 亿多人一年的口粮．为营造“节约光荣，浪费可耻”的氛围，某市发起了“光盘行动”．某机构为调研民众对“光盘行动”的认可情况，在某大型餐厅中随机调查了 90 位来店就餐的客人，制成如右所示的列联表，通过计算得到 K^2 的观测值为

	认可	不认可
40 岁以下	20	20
40 岁以上 (含 40 岁)	40	10

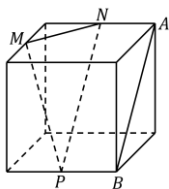
9. 已知 $P(K^2 \geq 6.635) = 0.010$ ， $P(K^2 \geq 10.828) = 0.001$ ，

则下列判断正确的是

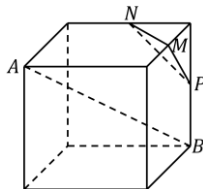
- A. 在该餐厅用餐的客人中大约有 66.7% 的客人认可“光盘行动”
 - B. 在该餐厅用餐的客人中大约有 99% 的客人认可“光盘行动”
 - C. 有 99% 的把握认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关
 - D. 在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下，认为“光盘行动”的认可情况与年龄有关
10. 如图，在下列四个正方体中， A, B 为正方体的两个顶点， M, N, P 为所在棱的中点，则在这四个正方体中，直线 $AB \parallel$ 平面 MNP 的是



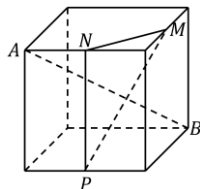
A



B



C



D

11. 已知 P 是双曲线 $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 在第一象限上一点， F_1, F_2 分别是 E 的左、右焦点，

$\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{15}{2}$ ．则以下结论正确的是

A. 点 P 的横坐标为 $\frac{5}{2}$

B. $\frac{\pi}{3} < \angle F_1PF_2 < \frac{\pi}{2}$

C. $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 1

D. $\angle F_1PF_2$ 平分线所在的直线方程为 $3x - 2y - 4 = 0$

12. 在数学中, 双曲函数是一类与三角函数类似的函数. 最基本的双曲函数是双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 等. 双曲函数在物理及生活中有着某些重要的应用, 譬如达·芬奇苦苦思索的悬链线(例如固定项链的两端, 使其在重力的作用下自然下垂, 那么项链所形成的曲线即为悬链线)问题, 可以用双曲余弦型函数来刻画. 则下列结论正确的是
- A. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$
- B. $y = \cosh x$ 为偶函数, 且存在最小值
- C. $\forall x_0 > 0, \sinh(\sinh x_0) > \sinh x_0$
- D. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 \neq x_2$, $\frac{\sinh x_1 - \sinh x_2}{x_1 - x_2} > 1$

第 II 卷

注意事项:

用 0.5 毫米黑色签字笔在答题卡上书写作答. 在试题卷上作答, 答案无效.

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在题中的横线上.

13. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 4 \leq 0, \\ 2x + y - 6 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 则 $x - 2y$ 的取值范围为_____.
14. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中, $\frac{1}{x}$ 的系数为_____.
15. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 侧面 PAC 与底面 ABC 垂直, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, $AB = 3$, $PA = 2$. 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为_____.
16. 已知圆 C 的方程为 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, 过点 $M(2,0)$ 的直线与圆 C 交于 P, Q 两点(点 Q 在第四象限). 若 $\angle QMO = 2\angle QPO$, 则点 P 的纵坐标为_____.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. （本小题满分 10 分）

在① $S_n = 2a_n + 1$ ；② $a_1 = -1, \log_2(a_n a_{n+1}) = 2n - 1$ ；③ $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ ， $S_2 = -3$ ， $a_3 = -4$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题的横线上，并解答．

问题：已知单调数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足_____．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{-na_n\}$ 的前 n 项和 T_n ．

18. （本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ， $a + b = c \cos B - b \cos C$ ．

（1）求角 C 的大小；

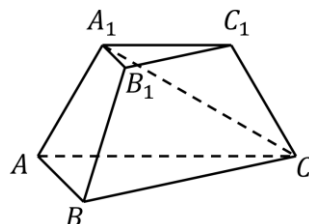
（2）设 CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，求证： $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CB} = \frac{1}{CD}$ ．

19. （本小题满分 12 分）

如图，在三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 = A_1C_1 = CC_1 = 1$ ， $AC = 2$ ， $A_1C \perp AB$ ．

（1）求证：平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ；

（2）若 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 1$ ，求二面角 $A - BB_1 - C$ 的正弦值．



20. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 $A_1(-\sqrt{2}, 0)$ ， $A_2(\sqrt{2}, 0)$ ，上、

下顶点分别为 B_1, B_2 ，四边形 $A_1B_2A_2B_1$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ．

（1）求 E 的方程；

（2）设 P 为 E 上异于 A_1, A_2 的动点，直线 A_1P 与 y 轴交于点 C ，过 A_1 作 $A_1D \parallel PA_2$ ，交 y 轴于点 D ．试探究在 x 轴上是否存在一定点 Q ，使得 $\overline{QC} \cdot \overline{QD} = 3$ ，若存在，求出点 Q 坐标；若不存在，说明理由．

21. （本小题满分 12 分）

从 2021 年 1 月 1 日起某商业银行推出四种存款产品，包括协定存款、七天通知存款、结构性存款及大额存单．协定存款年利率为 1.68%，有效期一年，服务期间客户帐户余额须不少于 50 万元，多出的资金可随时支取；七天通知存款年利率为 1.8%，存期须超过 7 天，支取需要提前七天建立通知；结构性存款存期一年，年利率为 3.6%；大额存单，年利率为 3.84%，起点金额 1 000 万元．（注：月利率为年利率的十二分之一）

已知某公司现有 2020 年底结余资金 1 050 万元．

（1）若该公司有 5 个股东，他们将通过投票的方式确定投资一种存款产品，每个股东只能选择一种产品且不能弃权，求恰有 3 个股东选择同一种产品的概率；

（2）公司决定将 550 万元作协定存款，于 2021 年 1 月 1 日存入该银行账户，规定从 2 月份起，每月首日支取 50 万元作为公司的日常开销．将余下 500 万元中的 x 万元作七天通知存款，准备投资高新项目，剩余 $(500 - x)$ 万元作结构性存款．

①求 2021 年全年该公司从协定存款中所得的利息；

②假设该公司于 2021 年 7 月 1 日将七天通知存款全部取出，本金 x 万元用于投资高新项目，据专业机构评估，该笔投资到 2021 年底将有 60% 的概率获得 $-\frac{x^3}{30\,000} + 0.02x^2 + 0.135x$ 万元的收益，有 20% 的概率亏损 $0.27x$ 万元，有 20% 的概率保本．问： x 为何值时，该公司 2021 年存款利息和投资高新项目所得的总收益的期望最大，并求最大值．

22. （本小题满分 12 分）

已知 $f(x) = x^2 e^x - 1$ ．

（1）判断 $f(x)$ 的零点个数，并说明理由；

（2）若 $f(x) \geq a(2\ln x + x)$ ，求实数 a 的取值范围．