2021 届石家庄市高中毕业班教学质量检测（一）

数学答案

一、单选：

1.B　2.A　3.B　4.C　5.C　6.D　7.D　8.A

二、多选：

9. AD　　10ACD　　11BC　12BD

三、填空题

13.　0.77　　14 .　$y^2=x,\frac{3}{4}$　（满足 $0<p<1$ 的答案均给分）

15.　$\frac{2\sqrt{15}}{5}$　　16 .　$(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

四、解答题：（每题仅给出一种或两种答案，其他种情况，请各校教研组参照给分标准，商定给分）

17.解：（Ⅰ）由 a_1,a_2,a_5 成等比数列可得 $a_2{}^2=a_1\cdot a_5$，　……………………………2 分

即 $(1+d)^2=1\times(1+4d)$，解得 $d=2$ 或 $d=0$（舍），………………3 分

$\therefore a_n=2n-1$，…………………………4 分

(Ⅱ)由（Ⅰ）得 $a_n\cdot b_n=(2n-1)\times 2^{n-1}$

所以 $T_n=1\times 2^0+3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n-1)\times 2^{n-1}$，……………………………6 分

$\therefore 2T_n=1\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-1}+(2n-1)\times 2^n$，

两式相减得 $-T_n=2^0+2\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+2\times 2^{n-1}-(2n-1)\times 2^n$ ……………………………8 分

$=1+2\times\frac{2\times(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)\times 2^n=1-4+2\times 2^n-(2n-1)\times 2^n=-3+(3-2n)\times 2^n$

$\therefore T_n=3+(2n-3)\times 2^n$.　……………………………10 分

18.　解:（Ⅰ）由 $\sqrt{3}c=b(\sin A+\sqrt{3}\cos A)$ 得 $\sqrt{3}\sin C=\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin B\cos A$，

………………………2分

$\therefore \sqrt{3}\sin(A+B)=\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin B\cos A$

$\therefore \sqrt{3}\sin A\cos B+\sqrt{3}\cos A\sin B=\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin B\cos A$……………4 分

所以$\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin A\sin B$，$\therefore \tan B=\sqrt{3},\because B\in(0,\pi)$, $\therefore B=\dfrac{\pi}{3}$.

……………………………6 分

(Ⅱ)法一：$\because a+c=2,\therefore c=2-a$，

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$
$=a^2+c^2-ac$

…………………8 分

$=a^2+(2-a)^2-a(2-a)=3a^2-6a+4=3(a-1)^2+1$

…………………………10 分

$\because a\in(0,2)\therefore b^2\in[1,4)\therefore b\in[1,2)$. …………………………12 分

法二：

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$
$=a^2+c^2-ac$

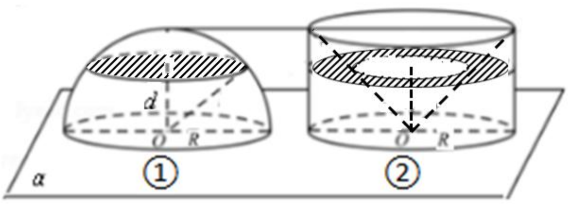
…………………8 分

$=\left(\mathrm{a+c}\right)^2\text{-3ac=4-3ac}\ge 4\text{-}3\left(\dfrac{\mathrm{a+c}}{2}\right)^2=1$（当且仅a=c时取等号）……10 分

又$b<a+c=2$，
$\therefore \mathrm{b}\in\left[1,2\right)$

…………………………12分

19.解：（Ⅰ）由图可知，图①几何体的为半径为R的半球，



图②几何体为底面半径和高都为R的圆柱中挖掉了一个圆锥，

与图①截面面积相等的图形是圆环（如阴影部分），**（因此处为学生自己画图，可能不够标准，只要意思对即给分）** ....2 分

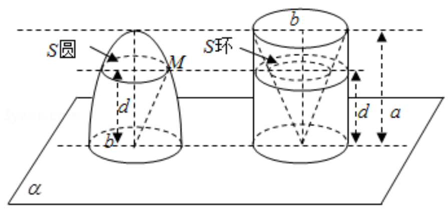
证明如下：

在图①中，设截面圆的圆心为O_1，易得截面圆O_1的面积为$\pi(R^2-d^2)$，..................3 分

在图②中，截面截圆锥得到的小圆的半径为d，所以，圆环的面积为$\pi(R^2-d^2)$，

所以，截得的截面的面积相等.....................5 分

(Ⅱ)类比（Ⅰ）可知，椭圆的长半轴为a，短半轴为b，构造两个底面半径为b，高为a的圆柱，把半椭球与圆柱放在同一个平面上（如图），在圆柱内挖去一个以圆柱下底面圆心为顶点，圆柱上底面为底



面的圆锥，即挖去的圆锥底面半径为b，高为a；

...................6 分

在半椭球截面圆的面积为$\pi\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-d^2)$，

在圆柱内圆环的面积为$\pi b^2-\pi\dfrac{b^2}{a^2}d^2=\pi\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-d^2)$ ....8 分

$\therefore$ 距离平面α为d的平面截取两个几何体的平面面积相等，

根据祖暅原理得出椭球A的体积为：

$V_A=2\left(V_{圆柱}-V_{圆锥}\right)=2\left(\pi\cdot b^2\cdot a-\dfrac{1}{3}\pi\cdot b^2\cdot a\right)=\dfrac{4\pi}{3}ab^2$， ....9 分

同理：椭球B的体积为$V_B=\dfrac{4\pi}{3}a^2b$ ....11 分

所以，两个椭球A,B的体积之比为$\dfrac{b}{a}$. ....12 分

20．解：（Ⅰ）设前 24 分钟比赛甲胜出分别为$A_i(i=1,2,3)$，乙胜出分别为$B_i(i=1,2,3)$，在“FAST5”模式每局比赛甲获胜为C，4 局比赛决出胜负记为事件D.

$P(D)=P(A_1A_2CC+A_1A_2A_3C+B_1B_2\overline{C}\overline{C}+B_1B_2B_3\overline{C})$ ....2 分

$=(\dfrac{2}{3})^2\cdot(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{2}{3})^3\cdot\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3})^2\cdot(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{3})^3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{36}$； ....4 分

（Ⅱ）X的可能取值为 4、5、6、7 ....6 分

$P(X=4)=(\dfrac{2}{3})^3\cdot\dfrac{1}{2}+(\dfrac{1}{3})^3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$；

$P(X=5)=(\dfrac{2}{3})^3(\dfrac{1}{2})^2+C_3^2(\dfrac{2}{3})^2\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2})^2+C_3^1\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{3})^2(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{1}{3})^3(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{4}$；

$P(X=6)=(\dfrac{2}{3})^3(\dfrac{1}{2})^3+C_3^2(\dfrac{2}{3})^2\dfrac{1}{3}C_2^1(\dfrac{1}{2})^3+C_3^1\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{3})^2(\dfrac{1}{2})^3$

$+(\dfrac{1}{3})^3(\dfrac{1}{2})^3+C_3^2(\dfrac{1}{3})^2\dfrac{2}{3}C_2^1(\dfrac{1}{2})^3+C_3^1\dfrac{1}{3}(\dfrac{2}{3})^2(\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{7}{24}$；

$P(X=7)=(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{2})^4+C_3^2(\frac{2}{3})^2\frac{1}{3}C_3^1(\frac{1}{2})^4+C_3^1\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^2C_3^2(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{3})^3(\frac{1}{2})^4$

$+(\frac{1}{3})^3(\frac{1}{2})^4+C_3^2(\frac{1}{3})^2\frac{2}{3}C_3^1(\frac{1}{2})^4+C_3^1\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2C_3^2(\frac{1}{2})^4+(\frac{2}{3})^3(\frac{1}{2})^4=\frac{7}{24}$；

所以，随机变量 X 的概率分布列为：

X	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$

....................10 分

（每种情况 1 分）

X 的数学期望为 $EX=4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{4}+6\times\frac{7}{24}+7\times\frac{7}{24}=\frac{137}{24}$． ....12 分

21.解：（Ⅰ）由已知 $e=\sqrt{1+(\frac{b}{a})^2}=\sqrt{3}$ 且 $\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=\sqrt{2}$ ....2 分

即 $a^2=1,b^2=2$，所以双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$； .... 4 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，且由已知得 $x_0{}^2-\frac{y_0{}^2}{2}=1$

联立 $\begin{cases}x_0x-\frac{y_0y}{2}=1\\ y=\sqrt{2}x\end{cases}$ 解得： $x_1=\frac{1}{x_0-\frac{\sqrt{2}y_0}{2}}$，所以 $y_1=\sqrt{2}x_1$；

联立 $\begin{cases}x_0x-\frac{y_0y}{2}=1\\ y=-\sqrt{2}x\end{cases}$ 解得： $x_2=\frac{1}{x_0+\frac{\sqrt{2}y_0}{2}}$，所以 $y_2=-\sqrt{2}x_2$；

.....................6 分

法一：

设 ΔAOB 的外心 $M(x,y)$，则由 $|MA|=|MO|=|MB|$ 得：

$(x-x_1)^2+(y-\sqrt{2}x_1)^2=x^2+y^2=(x-x_2)^2+(y+\sqrt{2}x_2)^2$ ....8 分

即 $xx_1+\sqrt{2}yx_1=\frac{3}{2}x_1{}^2\Rightarrow x+\sqrt{2}y=\frac{3}{2}x_1$，同理 $xx_2-\sqrt{2}yx_2=\frac{3}{2}x_2{}^2\Rightarrow x-\sqrt{2}y=\frac{3}{2}x_2$

两式相乘得 $x^2-2y^2=\frac{9}{4}x_1x_2$ ....10 分

又 $\because x_1x_2=\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{2}y_0}{2}}\cdot\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{2}y_0}{2}}=\dfrac{1}{x_0^{\ 2}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2}}=1$

所以ΔAOB的外心M的轨迹方程为$x^2-2y^2=\dfrac{9}{4}$； ....12 分

法二：设ΔAOB的外心$M(x,y)$，

线段OA的中垂线方程为：$y-\dfrac{y_1}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{x_1}{2})$，线段$OB$的中垂线方程为：$y-\dfrac{y_2}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{x_2}{2})$，

联立$\begin{cases}y-\dfrac{y_1}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{x_1}{2})\\ y-\dfrac{y_2}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\dfrac{x_2}{2})\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}(x_1+x_2)\\ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}(x_1-x_2)\end{cases}$ ....8 分

$\because x_1+x_2=\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{2}y_0}{2}}+\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{2}y_0}{2}}=\dfrac{2x_0}{x_0^{\ 2}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2}}=2x_0$，

$x_1-x_2=\dfrac{1}{x_0-\dfrac{\sqrt{2}y_0}{2}}-\dfrac{1}{x_0+\dfrac{\sqrt{2}y_0}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}y_0}{x_0^{\ 2}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2}}=\sqrt{2}y_0$ ....10 分

即$\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}(x_1+x_2)=\dfrac{3}{2}x_0\\ y=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}(x_1-x_2)=\dfrac{3}{4}y_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{2}{3}x\\ y_0=\dfrac{4}{3}y\end{cases}$，

代入$x_0^{\ 2}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2}=1$得$\dfrac{4}{9}x^2-\dfrac{8}{9}y^2=1$

所以ΔAOB的外心M的轨迹方程为$x^2-2y^2=\dfrac{9}{4}$； ....12 分

22.解：（Ⅰ） 设$f(x)=\dfrac{-x\sin x}{\cos x},x\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

$$f^{'}(x)=\frac{-(\sin x+x\cos x)\cos x-(-x\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}=-\frac{\sin x\cos x+x}{\cos^2 x}=-\frac{\sin 2x+2x}{2\cos^2 x}$$

.....................2 分

$\because\sin 2x+2x\geq-1+2x>0\therefore f^{'}(x)<0$，即$f(x)$单调递减 .... 3 分

即 $x=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow\dfrac{-x\sin x}{\cos x}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$， $x=\dfrac{3\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{-x\sin x}{\cos x}=\dfrac{3\pi}{4}$；

即 a 的取值范围为 $a\in\left[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right]$；　　　　　　　　............. 5 分

（Ⅱ）由已知 $g^{'}(x)=(a+1)\cos x-(\cos x-x\sin x)=a\cos x+x\sin x$，

$g^{''}(x)=-a\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x-(a-1)\sin x$，

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$时， $\mathrm{g}^{''}(x)<0$ 即 $\mathrm{g}^{'}(x)$ 单调递减；

又∵ $g^{'}(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}>0, g^{'}(\pi)=-a<0$，由零点存在性定理必存在唯一 $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$满足 $g^{'}(x_0)=0$，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \mathrm{x}_0\right)$时， $\mathrm{g}^{'}(x)>0$ 即 $\mathrm{g}(x)$ 单调递增；当 $x\in\ \mathrm{x}_0,\pi\ $ 时， $\mathrm{g}'(x)<0$ 即 $\mathrm{g}(x)$ 单调递减；

.... 7 分

由 $a\cos x_0+x_0\sin x_0=0\Rightarrow a=\dfrac{-x_0\sin x_0}{\cos x_0}, x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$

得

$$G(a)=g(x)_{\max}=g(x_0)=(a+1)\sin x_0-x_0\cos x_0=(1-\frac{x_0\sin x_0}{\cos x_0})\sin x_0-x_0\cos x_0=\sin x_0-\frac{x_0}{\cos x_0}$$

.................9 分

由第（Ⅰ）问可知函数 $f(x)=\dfrac{-x\sin x}{\cos x}, x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$单调递减，即当 $a\in\left[\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right]$时， $x_0\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right]$；

......................10 分

设 $H(x)=\sin x-\dfrac{x}{\cos x}, x\in\left[\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right]$

$$H^{'}(x)=\cos x-\frac{\cos x-x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos x(\cos^2 x-1)-x\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos x(-\sin^2 \mathrm{x})-x\sin x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{-\sin x(\sin x\cos x+x)}{\cos^2 x}=\frac{-\sin x(\sin 2\mathrm{x}+2x)}{2\cos^2 x}<0$$

所以 $H(x)$ 单调递减， $H(x)_{\min}=H(\dfrac{3\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\pi$，

综上：函数 $g(x)$ 的最大值 $G(a)$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi$；　　　　...................... 　　12 分