

珠海市 2020-2021 学年度第一学期高三 摸底测试 数学 2020.9

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 > 4\}$, $B = \{x | x^2 - x < 30\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(-5, -2) \cup (2, 6)$ B. $(-2, 2)$
C. $(-\infty, -5) \cup (6, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
2. $\frac{(1-i)^2}{i^7} =$
A. 1 B. 2 C. $-i$ D. $-2i$
3. 8 名医生去甲、乙、丙三个单位做核酸检测，甲、乙两个单位各需三名医生，丙需两名医生，其中医生 a 不能去甲医院，则不同的选派方式共有
A. 280 种 B. 350 种 C. 70 种 D. 80 种
4. 一球 O 内接一圆锥，圆锥的轴截面为正三角形 ABC ，过 C 作与球 O 相切的平面 α ，则直线 AC 与平面 α 所成的角为
A. 30° B. 45° C. 15° D. 60°
5. 现有 8 位同学参加音乐节演出，每位同学会拉小提琴或会吹长笛，已知 5 人会拉小提琴，5 人会吹长笛，现从这 8 人中随机选一人上场演出，恰好选中两种乐器都会演奏的同学的概率是
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{5}{8}$
6. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，且 $f(-5) = 0$ ，则满足 $xf(x) < 0$ 的解集是
A. $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$ B. $(-\infty, -5) \cup (0, 5)$
C. $(-5, 0) \cup (5, +\infty)$ D. $(-5, 0) \cup (0, 5)$
7. 已知 P 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 边上或正方形内的一点，则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 的最大值是
A. $\frac{1}{4}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{1}{2}$

8. 直线 $l: y = kx + b$ 是曲线 $f(x) = \ln(x+1)$ 和曲线 $g(x) = \ln(e^2 x)$ 的公切线, 则 $b =$

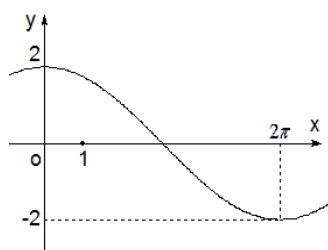
- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. $\ln \frac{e}{2}$ D. $\ln(2e)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分。

9. 已知双曲线 E 的中心在原点, 对称轴为坐标轴, 渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 则双曲线 E 的离心率为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

10. 如图是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的部分图象, 则



(第 10 题图)

- A. $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$ B. $f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$
C. $f(x) = -2\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2})$ D. $f(x) = 2\cos(\frac{1}{2}x)$

11. 已知 $ab < 0$, 则

- A. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ B. $a^2 + b^2 < 2ab$ C. $a(a-b) > 0$ D. $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right| \geq 2$

12. 已知随机变量 X 的取值为不大于 n ($n \in N^*$) 的非负整数, 它的概率分布列为

X	0	1	2	3	...	n
P	p_0	p_1	p_2	p_3	...	p_n

其中 p_i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) 满足 $p_i \in [0, 1]$, 且 $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. 定义由 X 生成的

函数 $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \dots + p_i x^i + \dots + p_n x^n$, $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数,

$E(X)$ 为随机变量 X 的期望. 现有一枚质地均匀的正四面体型骰子, 四个面分别标有 1, 2,

3, 4 个数, 这枚骰子连续抛掷两次, 向下点数之和为 X , 此时由 X 生成的函数为 $f_1(x)$,

则

A. $E(X) = g(2)$ B. $f_1(2) = \frac{15}{2}$ C. $E(X) = g(1)$ D. $f_1(2) = \frac{225}{4}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，过原点的直线 l 与 E 交于 A 、 B 两

点， AF_1 、 BF_2 都与 x 轴垂直，则 $|AB| =$ _____.

14. 将数列 $\{2^n\}$ 与 $\{2n\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为_____（用数字作答）.

15. 已知 α 、 β 为锐角三角形的两个内角， $\sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ， $\sin(\alpha + \beta) = \frac{5\sqrt{3}}{14}$ ，则

$\cos 2\beta =$ _____.

16. 一半径为 R 的球的表面积为 64π ，球一内接长方体的过球心的对角截面为正方形，则该长方体体积的最大值为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在① $\cos B = \frac{1}{2}$ ， ② $\cos C = \frac{1}{2}$ ， ③ $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$

这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由.

问题：是否存在非直角 $\triangle ABC$ ，它的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，

且 $\sin B(1 + 2\cos C) = 2\sin A\cos C + \cos A\sin C$ ， $b = 1$ ，_____？

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18. (12 分)

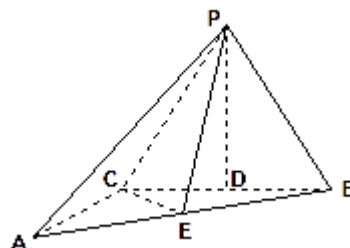
已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，满足 $2a_3 + a_4 = a_5$ ， $a_1 + a_2 = 1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $t_n = \log_2(3a_n)$ ，求数列 $\left\{ \frac{1}{t_{n+1}t_{n+2}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分) 如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC=BC=PC=PB=2$, $\angle ACB=120^\circ$, 平面 $PBC \perp$ 底面 ABC , D , E 分别是 BC , AB 的中点.

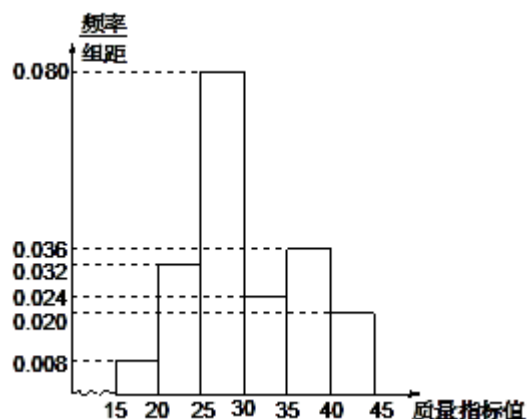
- (1) 证明: $PD \perp$ 平面 ABC ;
 (2) 求二面角 $P-CE-B$ 的正切值.



(第19题图)

20. (12分) 某药企对加工设备进行升级, 现从设备升级前、后生产的大量产品中各抽取了100件产品作为样本检测某项质量指标值: 该项质量指标值落在 $[25, 30)$ 内的产品为优等品, 每件售价240元; 质量指标值落在 $[20, 25)$ 和 $[30, 35)$ 内的为一等品, 每件售价为180元; 质量指标值落在 $[35, 40)$ 内的为二等品, 每件售价为120元; 其余为不合格品, 全部销毁. 每件产品生产销售全部成本50元.

下图是设备升级前100个样本的质量指标值的频率分布直方图



(第20题图)

下表是设备升级后100个样本的质量指标值的频数分布表

质量	$[15, 20)$	$[20, 25)$	$[25, 30)$	$[30, 35)$	$[35, 40)$	$[40, 45)$
频数	2	18	48	14	16	2

- (1) 以样本估计总体, 若生产的合格品全部在当年内可以销售出去, 计算设备升级前一件产品的利润 X (元) 的期望的估计值.
 (2) 以样本估计总体, 若某位患者从升级后生产的合格产品中随机购买两件, 设其支付的费用为 ξ (单位: 元), 求 ξ (元) 的分布列.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = xe^x + ax^2 - 2(e^x + ax) + a$, $a \geq 0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 讨论 $f(x)$ 的零点的个数.

22. (12分) 已知抛物线 E 的顶点在原点, 焦点 $F(0, \frac{p}{2})$ ($p > 0$) 到直线 $l: y = x - 2$ 的距

离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $P(x_0, y_0)$ 为直线 l 上的点, 过 P 作抛物线 E 的切线 PM 、 PN , 切点为 M 、 N .

(1) 求抛物线 E 的方程;

(2) 若 $P(3, 1)$, 求直线 MN 的方程;

(3) 若 P 为直线 l 上的动点, 求 $|MF| \cdot |NF|$ 的最小值.