珠海市 2020-2021 学年度第一学期高三摸底测试

数学　2020.9 解析及评分参考

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设集合 $A=\{x\,|\,x^2>4\}$，$B=\{x\,|\,x^2-x<30\}$，则 $A\cap B=$　　A

A．$(-5,-2)\cup(2,6)$　　B．$(-2,2)$　　C．$(-\infty,-5)\cup(6,+\infty)$

D．$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

2．$\dfrac{(1-i)^2}{i^7}=$　B

A．1　　B．2　　C．$-$i　　D．$-$2i

3．8 名医生去甲、乙、丙三个单位做核酸检测，甲、乙两个单位各需三名医生，丙需两名医生，其中医生 a 不能去甲医院，则不同的选派方式共有　B

A．280 种　　B．350 种　　C．70 种　　D．80 种

4．一球 O 内接一圆锥，圆锥的轴截面为正三角形 ABC，过 C 作与球 O 相切的平面 α，则直线 AC 与 α 所成的角为　D

A．30°　　B．45°　　C．15°　　D．60°

5．现有 8 位同学参加音乐节演出，每位同学会拉小提琴或会吹长笛，已知 5 人会拉小提琴，5 人会吹长笛，现从这 8 人中随机选一人上场演出，恰好选中两种乐器都会演奏的同学的概率是　A

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．$\dfrac{3}{8}$　　D．$\dfrac{5}{8}$

6．若定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $f(-5)=0$，则满足 $xf(x)<0$ 的解集是　D

A．$(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$　　B．$(-\infty,-5)\cup(0,5)$　　C．$(-5,0)\cup(5,+\infty)$

D．$(-5,0)\cup(0,5)$

7．已知 P 是边长为 1 的正方形 $ABCD$ 边上或正方形内的一点，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最大值是　C

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．2　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

8．直线 $l:y=kx+b$ 是曲线 $f(x)=\ln(x+1)$ 和曲线 $g(x)=\ln(e^2x)$ 的公切线，则 $b=$　C

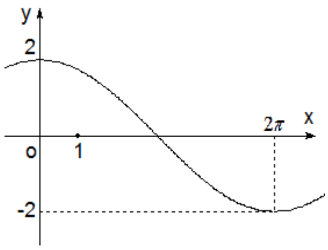
A．2　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\ln\frac{e}{2}$　　D．$\ln(2e)$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

9．已知双曲线 E 的中心在原点，对称轴为坐标轴，渐近线方程为 $y=\pm 2x$，则双曲线 E 的离心率为　AB

A．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{5\sqrt{3}}{3}$　　D．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$

10．如图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0)$ 的部分图象，则　BCD



A．$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$　　B．$f(x)=2\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

C．$f(x)=-2\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2})$　　D．$f(x)=2\cos(\frac{1}{2}x)$

11．已知 $ab<0$，则　ACD

A．$a^2+b^2\geq 2ab$　　B．$a^2+b^2<2ab$　　C．$a(a-b)>0$　　D．$\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geq 2$

12．已知随机变量 X 的取值为不大于 $n(n\in N^*)$ 的非负整数，它的概率分布列为

X	0	1	2	3	$\cdots$	n
p	p_0	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

其中 $p_i(i=0,1,2,3,\cdots,n)$满足 $p_i\in[0,1]$，且 $p_0+p_1+p_2+\cdots+p_n=1$．定义由 X 生成的函数 $f(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots+p_ix^i+\cdots+p_nx^n$，$g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，$E(X)$ 为随机变量 X 的期望．现有一枚质地均匀的正四面体型骰子，四个面分别标有 1，2，3，4 个点数，这枚骰子连续抛掷两次，向下点数之和为 X，此时由 X 生成的函数为 $f_1(x)$，则　CD

A．$E(X)=g(2)$　　B．$f_1(2)=\frac{15}{2}$　　C．$E(X)=g(1)$　　D．$f_1(2)=\frac{225}{4}$

提示：

X	2	3	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$f_1(x)=\frac{1}{16}x^2+\frac{2}{16}x^3+\frac{3}{16}x^4+\frac{4}{16}x^5+\frac{3}{16}x^6+\frac{2}{16}x^7+\frac{1}{16}x^8$$

$$f_1(2)=\frac{1}{16}\times2^2+\frac{2}{16}\times2^3+\frac{3}{16}\times2^4+\frac{4}{16}\times2^5+\frac{3}{16}\times2^6+\frac{2}{16}\times2^7+\frac{1}{16}\times2^8$$

$$=\frac{225}{4}$$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，过原点的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，AF_1、BF_2 都与 x 轴垂直，则 $|AB|=$________．$\sqrt{13}$

14．将数列 $\{2^n\}$ 与 $\{2n\}$ 的公共项从小到大排列得到数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为________（用数字作答）．　2046

15．已知 α、β 为锐角三角形的两个内角，$\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，则 $\cos 2\beta=$________．$-\frac{1}{2}$

16．一半径为 R 的球的表面积为 64π，球一内接长方体的过球心的对角截面为正方形，则该长方体体积的最大值为__________．$64\sqrt{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

在① $\cos B=\frac{1}{2}$，　② $\cos C=\frac{1}{2}$，　③ $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}$

这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，若问题中的三角形存在，求 c 的值；若问题中的三角形不存在，说明理由．

问题：是否存在非直角 $\triangle ABC$，它的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，

且 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$，$b=1$，________?

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

解：$\triangle ABC$ 中，由 $\sin B(1+2\cos C)=2\sin A\cos C+\cos A\sin C$

得 $\sin B+2\sin B\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin A\cos C$

$=\sin B+\sin A\cos C$ ……………………………………………………………1 分

$\therefore (2\sin B-\sin A)\cos C=0$ ……………………………………………………………2 分

$\because \triangle ABC$ 不是直角三角形

$\therefore \cos C\neq 0$

$\therefore 2\sin B=\sin A$ ……………………………………………………………3 分

即 $a=2b$ ……………………………………………………………4 分

$\because b=1$

$\therefore a=2$ ……………………………………………………………6 分

选①：由 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，及 $0<B<\pi$ 　得 $B=\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………………………………7 分

由 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$ 　得 $\sin A=\sqrt{3}>1$ ……………………………………………9 分

不合理，故 $\triangle ABC$ 不存在．……………………………………………………………10 分

选②：由 $\cos C=\dfrac{1}{2}$

得

$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{3}$ ……………………………………………………………8 分

$\therefore b^2+c^2=a^2$ ……………………………………………………………9 分

$\therefore A$ 为直角，不合题设，故 $\triangle ABC$ 不存在．……………………………………………10 分

选③：由 $\cos C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

得 $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{5-2\sqrt{2}}$. ……………………………………………………………

10 分

18.（12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，满足 $2a_3+a_4=a_5$ ， $a_1+a_2=1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）设 $t_n=\log_2(3a_n)$ ，求数列 $\left\{\dfrac{1}{t_{n+1}t_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

解:（1）设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q>0$

由 $\begin{cases}2a_3+a_4=a_5\\ a_1+a_2=1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2a_1q^2+a_1q^3=a_1q^4\\ a_1+a_1q=1\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{3}\\ q=2\end{cases}$ ………………………………2 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\dfrac{2^{n-1}}{3}$

$n\in N^*$ …………………………………………………………4 分

（2） $t_n=\log_2(3a_n)=\log_2 2^{n-1}=n-1$ ………………………………………………6 分

故 $\dfrac{1}{t_{n+1}t_{n+2}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ ……………………………………………………………8

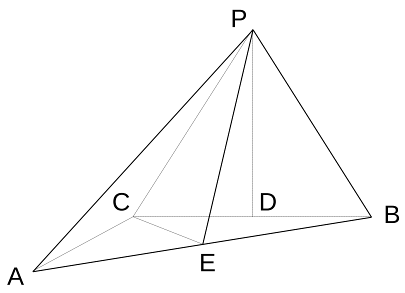
分

所以 $\left\{\dfrac{1}{t_{n+1}t_{n+2}}\right\}$ 的前 n 项和:

$T_n=(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{n}{n+1}$. ………………………………………

…………12 分

19.（12分）如图，三棱锥 $P-ABC$ 中， $AC=BC=PC=PB=2$ ，



$\angle ACB=120^{\circ}$，平面$PBC\perp$底面ABC，D，E分别是BC，AB的中点.

（1）证明：$PD\perp$平面ABC；

（2）求二面角$P-CE-B$的正切值.

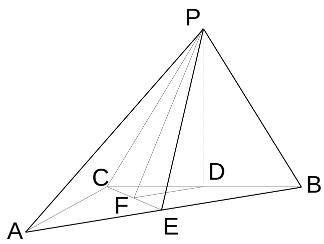
（1）证明：$\because PC=PB$，D是BC中点

$\therefore PD\perp BC$……………………………………………1分

$\because$平面$PBC\perp$底面ABC，$PD\subset$平面PBC，平面$PBC\bigcap$底面$ABC=BC$

$\therefore PD\perp$平面ABC.…………………………………………………4分

（2）解：如图，取CE中点F，连接DF，PF



则DF // AB………………………………………………5分

$\because AC=BC=PC=PB=2$，E是AB的中点，$\angle ACB=120^{\circ}$

$\therefore CE\perp AB$，……………………………………………………6分

$BE=\sqrt{3}$，$PD=\sqrt{3}$

$\therefore DF\perp CE$，…………………………………………………………7分

$DF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because PD\perp$平面ABC

$\therefore CE\perp PD$，$PD\bigcap DF=D$

$\therefore CE\perp$平面PDF……………………………………………………………………8分

$\therefore CE\perp FP$………………………………………………………………………9分

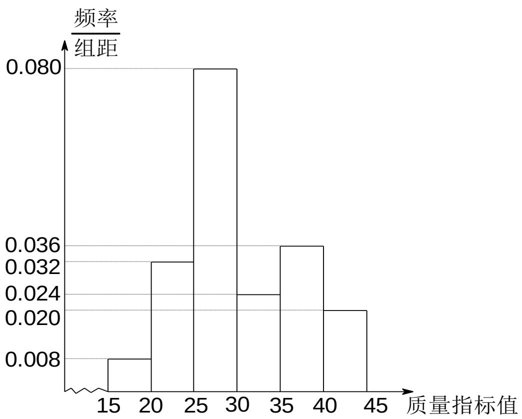
$\therefore\angle PFD$为二面角$P-CE-B$的平面角.…………………………………………………10分

在$Rt\Delta PDF$中，$\tan\angle PFD=\dfrac{PD}{DF}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$………………………………………11分

$\therefore$二面角$P-CE-B$的正切值为2.…………………………………………………………12分

20．（12分）某药企对加工设备进行升级，现从设备升级前、后生产的大量产品中各抽取了100件产品作为样本检测某项质量指标值：该项质量指标值落在$[25,30)$内的产品为优等品，每件售价240元；质量指标值落在$[20,25)$和$[30,35)$内的为一等品，每件售价为180元；质量指标值落在$[35,40)$内的为二等品，每件售价为120元；其余为不合格品，全部销毁．每件产品生产销售全部成本50元．

下图是设备升级前100个样本的质量指标值的频率分布直方图



下表是设备升级后100个样本的质量指标值的频数分布表

质 量	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$	$[30,35)$	$[35,40)$	$[40,45)$
频数	2	18	48	14	16	2

(1) 以样本估计总体，若生产的合格品全部在当年内可以销售出去，计算设备升级前一件产品的利润X(元)的期望的估计值．

(2)以样本估计总体，若某位患者从升级后生产的合格产品中随机购买两件，设其支付的费用为ξ(单位：元)，求ξ(元)的分布列．

解：(1)由题设知，$X=-50,70,130,190$ ··1分

X的分布列为

X	-50	70	130	190
P	0.14	0.18	0.28	0.4

···3分

设备升级前利润的期望值为

$E(X)=0.14\times(-50)+0.18\times70+0.28\times130+0.4\times190=118$ ……………………4分

$\therefore$升级前一件产品的利润的期望估计值为118元．………………………5分

(2) 升级后设患者购买一件合格品的费用为η(元)

则$\eta=120,180,240$ ……………………………………………………………………6分

患者购买一件合格品的费用η的分布列为

η	120	180	240
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

……………………………8分

则$\xi=240,300,360,420,480$ ……………………………………………………10分

$P(\xi=240)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P(\xi=300)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P(\xi=360)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$

$P(\xi=420)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$P(\xi=480)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

则升级后患者购买两件合格品的费用的分布列为

ξ	240	300	360	420	480
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

……………………………………………………………………………12分

21．（12分）已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x+ax^2-2(e^x+ax)+a$， $a\geq0$．

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

（2）讨论 $f(x)$ 的零点的个数.

解：（1）$\because$ $f(x)=x\mathrm{e}^x+ax^2-2(e^x+ax)+a$

$\therefore$ $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x+2a)$ ……………………………………………………1分

$a \geq 0$ 时 $x<1$ 时 $f'(x)<0$，$x>1$ 时 $f'(x)>0$.……………………………3分

$\therefore a \geq 0$ 时，$f(x)$ 的减区间是 $(-\infty,1)$，增区间是 $(1,+\infty)$. ………………………4分

（2）① $a>0$ 时，$\because f'(1)=0$ 且 $f(x)$ 的减区间是 $(-\infty,1)$，增区间是 $(1,+\infty)$

$\therefore f(1)=-e<0$ 是 $f(x)$ 的极小值，也是最小值……………………………………5分

$f(2)=a>0$，………………………………6分

取 $b<0$ 且 $b<\ln\frac{a}{2}$ ……………………………7分

则

$f(b)=(b-2)e^{b}+a(b-1)^{2}>\frac{a}{2}(b-2)+a(b-1)^{2}=\frac{a}{2}b(2b-3)>0$ ……………………………8分

$\therefore f(x)$ 在 $(b,1)$ 和 $(1,2)$ 上各一个零点……………………………………………9分

② $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)e^{x}$ 只一个零点 $x=2$ ……………………………………10分

综上，$a>0$ 时，$f(x)$ 有两个零点；…………………………………………………11分

$a=0$ 时，$f(x)$ 一个零点. ……………………………………………………………………12分

22. （12分）已知抛物线 E 的顶点在原点，焦点 $F(0,\frac{p}{2})$ $(p>0)$ 到直线 $l: y=x-2$ 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$P(x_0,y_0)$ 为直线 l 上的点，过 P 作抛物线 E 的切线 PM、PN，切点为 M、N.

(1)求抛物线 E 的方程；

(2) 若 $P(3,1)$，求直线 MN 的方程;

(3)若 P 为直线 l 上的动点，求 $|MF|\cdot|NF|$ 的最小值.

解：(1)由 $F(0,\frac{p}{2})$ 到直线 $l: x-y-2=0$ 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

得 $\frac{|\frac{p}{2}+2|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

得 $p=2$ 或 $p=-10$ ……………………………………………………………2分

$\because\ p>0$

$\therefore\ p=2$ ……………………………………………………………3分

$\therefore$抛物线$E:x^2=4y$.……………………………………………………4分

(2) 由$E:x^2=4y$知$y=\dfrac{1}{4}x^2$

$\therefore\ y'=\dfrac{x}{2}$ ……………………………………………………………5分

设切点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

则$PM:y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)=\dfrac{x_1}{2}x-\dfrac{x_1^2}{2}=\dfrac{x_1}{2}x-2y_1$

即$PM:y=\dfrac{x_1}{2}x-y_1$

$PN:y=\dfrac{x_2}{2}x-y_2$ ……………………………………………………6分

$\because\ P\in PM$，$P\in PN$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{3}{2}x_1-y_1-1=0\\\dfrac{3}{2}x_2-y_2-1=0\end{cases}$ 即$\begin{cases}3x_1-2y_1-2=0\\3x_2-2y_2-2=0\end{cases}$ ………………………………7分

$\therefore\ MN:3x-2y-2=0$. ………………8分

(3)若P为直线l上的动点，设$P(x_0,y_0)$，则$x_0=y_0+2$

由(2)知

$\because\ P\in PM$，$P\in PN$

$\therefore\begin{cases}\dfrac{x_0}{2}x_1-y_1-y_0=0\\\dfrac{x_0}{2}x_2-y_2-y_0=0\end{cases}$

$\therefore\ MN:\dfrac{x_0}{2}x-y-y_0=0$与$E:x^2=4y$联立消$x$得

$y^2-(y_0^2+2y_0+4)y+y_0^2=0$ ………… “*” ……………………………………9分

则y_1，y_2是“*”的二根

$\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = y_0^2 + 2y_0 + 4 \\ y_1 y_2 = y_0^2 \end{cases}$ ………………………………………………………………………………

10分

$|MF| \cdot |NF| = (y_1 + 1)(y_2 + 1) = y_1 + y_2 + y_1 y_2 + 1$

$= 2y_0^2 + 2y_0 + 5$ ……………………………………………………………………11分

当 $y_0 = -\dfrac{1}{2}$ 时，$|MF| \cdot |NF|$ 得到最小值为 $\dfrac{9}{2}$. ………………………………12分