

长郡中学

师大附中联考联合体2020年高三12月联考

长沙一中

数 学

时量：120分钟 满分：150 分

得分_____

一、单项选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。)

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$

A. (0,2)

B. (1,2)

C. (0,3)

D. (2,3)

2. 若 $\frac{a-i}{3+2i}$ 为纯虚数，则实数 a 的值为

A. $-\frac{3}{2}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{2}$

3. 平面向量 $a = (1, 2)$, $|b| = 3$, $a \cdot b = -6$, 则向量 a, b 夹角的余弦值为

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{1}{5}$

4. 《易经》是中国文化中的精髓，右图是易经八卦图(含乾、坤、巽、震、坎、离、艮、兑八卦)，每一卦由三根线组成(——表示一根阳线，--表示一根阴线)，从八卦中任取一卦，这一卦的三根线中恰有1根阳线和2根阴线的概率为

A. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{1}{2}$



5. 已知两个变量具备线性相关性，现通过最小二乘法求回归直线方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ，将已知

数据代入公式 $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2$ 计算后得到的代数式为： $3a^2 + 13b^2 + 12ab - 2b + 3$ ，

使上述代数式取值最小的 a, b 的值即为回归方程的系数，则回归直线方程为

A. $\hat{y} = -x + 2$

B. $\hat{y} = -x - 2$

C. $\hat{y} = x + 2$

D. $\hat{y} = x - 2$

6. 某单位有6名员工，2020年国庆节期间，决定从6人中留2人值班，另外4人分别去张

家界、南岳衡山、凤凰古城、岳阳楼旅游. 要求每个景点有 1 人游览, 每个人只游览一个景点, 且这 6 个人中甲、乙不去衡山, 则不同的选择方案共有

- A. 120 种 B. 180 种 C. 240 种 D. 320 种

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 命题 $p: S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 命题 $q: \{a_n\}$ 为等差数列, 则 p 是 q 成立的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

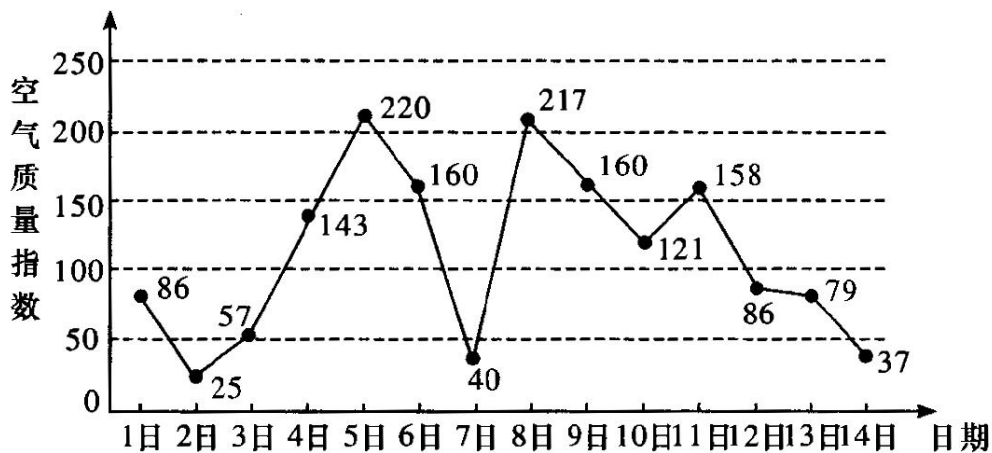
8. 已知 A, B 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右顶点, P 为椭圆 C 上一动点, PA, PB 与直线 $x = 3$ 交于 M, N 两点, $\triangle PMN$ 与 $\triangle PAB$ 的外接圆的周长分别为 L_1, L_2 , 则 $\frac{L_1}{L_2}$ 的最小

值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

二、多项选择题(本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得3分, 有选错的得0分.)

9. 空气质量指数大小分为五级. 指数越大说明污染的情况越严重, 对人体危害越大. 指数范围在: $[0, 50]$, $[51, 100]$, $[101, 200]$, $[201, 300]$, $[301, 500]$ 分别对应“优”、“良”、“轻(中)度污染”、“中度(重)污染”、“重污染”五个等级. 下面是某市连续 14 天的空气质量指数趋势图, 下列说法正确的有



- A. 这 14 天中有 4 天空气质量指数为“良”
B. 这 14 天中空气质量指数的中位数是 103
C. 从 2 日到 5 日空气质量越来越差
D. 连续三天中空气质量指数方差最小的是 9 日到 11 日

10. 设动点 P 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上(含内部), 且 $\overrightarrow{D_1P} = \lambda \overrightarrow{D_1B}$, 当 $\angle APC$ 为锐角时, 实数 λ 可能的取值是

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, 下列说法正确的是

A. 若 $A > B$, 则 $\sin A > \sin B$

B. 存在 $\triangle ABC$ 满足 $\cos A + \cos B \leq 0$

C. 若 $\sin A < \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 为钝角三角形

D. 若 $C > \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin C > \sin^2 A + \sin^2 B$

12. 已知 $a > 0, m(x) = e^{x-2} - e^{2-x}, f(x) = am(x) - \sin \pi x$, 若 $f(x)$ 存在唯一零点, 下列说法正确的有

A. $m(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增

B. $m(x)$ 图象关于点 $(2, 0)$ 中心对称

C. 任取不相等的实数 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 均有 $\frac{m(x_1) + m(x_2)}{2} < m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

D. $a \geq \frac{\pi}{2}$

三 填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0, \\ 2^{-x} + 2, & x \leq 0, \end{cases}$, 则 $f(f(\frac{1}{2})) =$ _____.

$2^{-1} + 2 = \frac{5}{2}$

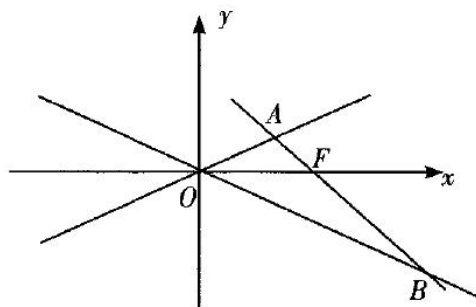
14. 某圆锥母线长为 4, 其侧面展开图 为半圆面, 则该圆锥高为_____.

15. 已知三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 100π , $PB \perp$ 平面 ABC , $PB=8$, $\angle HAC = 120^\circ$, 则三棱锥体积的最大值为_____.

16. 如图, 已知 F 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

的右焦点, 过点 F 的直线交两渐近线于 A, B 两点. 若 $\angle AOB = 120^\circ$, $\triangle OAB$ 内切圆的半径 r

$= \frac{\sqrt{3}a-b}{5}$, 则双曲线的离心率为_____.



四、解答题(本题共 6 小题 . 共 70 分 . 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本题满分 10 分)

在① $S_n + S_{n-2} = 2(S_{n-1} + 1)$; ② $S_{n+1} + 2 = S_{n+2} - a_{n+1}$; ③ $\frac{S_n}{n} = a_{n+1} - (n+1)$ 这三个条件

中任选一个, 补充在下面的问题中, 并解答该问题.

问题: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, _____, 若确定 $\{a_n\}$ 是等差数列, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式, 否则, 说明理由.

(注: 如果选择多个条件分别解答. 按第一个解答计分)

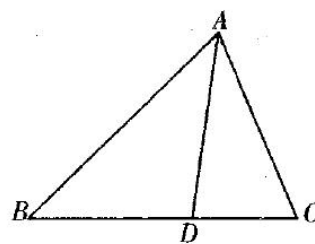
18. (本题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \frac{\pi}{3}$, $AB = 15$, 点 D 在边 BC 上,

$$CD = 1, \cos \angle ADC = \frac{1}{26}.$$

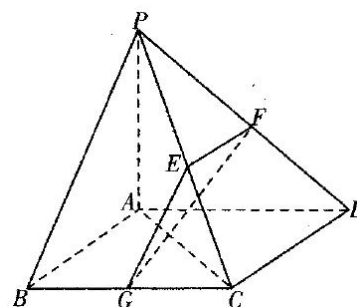
(1) 求 $\sin \angle BAD$;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



19. (本题满分 12 分)

四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，
 $\angle BAD = 120^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = 2\sqrt{3}$, E, F 分别是
 PC, PD 的中点.



(1) 已知 $\overrightarrow{BG} = \lambda \overrightarrow{BC}$, 若平面 $EFG \parallel$ 平面 PAB , 求 λ 的值;

(2) 在(1)的条件下, 求平面 EFG 与平面 PCD 所成二面角的正弦值.

20. (本题满分 12 分)

已知 A, B 分别 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点, 过点 $M(2, 0)$ 任作一条非

水平直线交椭圆于 P, Q 两点, 若椭圆长轴长为 8, 且过点 $(3, \frac{3\sqrt{7}}{4})$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 记直线 AP, BQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $\frac{k_1}{k_2}$ 是否为定值, 若是, 求出该定值. 若不

是, 请说明理由.

21. (本题满分 12 分)

有编号为 $1, 2, 3$ 的三只小球，和编号为 $1, 2, 3, 4$ 的四个盒子，将三个小球逐个随机的放入四个盒子中、每只球的放置相互独立.

- (1) 求三只小球恰在两个盒子中的概率；
- (2) 求三只小球在三个不同的盒子，且至少有两个球的编号与所在盒子编号不同的概率；
- (3) 记录至少有一只球的盒子. 以 X 表示这些盒子编号的最大值，求 EX .

22. (本题满分 12 分)

已知 $f(x) = ae^{2x} + (2a-1)e^x - x$, a 为常数.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq (3a-1)\cos x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.