

雅礼中学 2022 届高三入学考试

数 学

得分: _____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页。时量 120 分钟。满分 150 分。

第 I 卷

一、选择题:本大题共 8 个小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的。

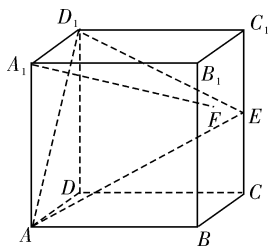
1. 已知集合 $M = \{x \mid \lg(x-1) \leq 0\}$, $N = \{x \mid |x| < 2\}$, 则 $M \cup N =$
A. $\emptyset$ B. $(1, 2)$
C. $(-2, 2]$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
2. 已知复数 z 满足 $z(1-i) = (2+i)i$, 则 $|z| =$
A. 1 B. 2 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为 B_1D_1 的中点, 则直线 PB 与 AD_1 所成的角为
A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$
4. 把函数 $y = f(x)$ 图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 再把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 则 $f(x) =$
A. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12}\right)$ B. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$
C. $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$ D. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$
5. 已知 F_1, F_2 是双曲线 C 的两个焦点, P 为 C 上一点, 且 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$, $|PF_1| = 3|PF_2|$, 则 C 的离心率为
A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{13}}{2}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\sqrt{13}$
6. 若 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$
A. $\frac{24}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $-\frac{24}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

7. 数学对于一个国家的发展至关重要,发达国家常常把保持数学领先地位作为他们的战略需求.现某大学为提高数学系学生的数学素养,特开设了“古今数学思想”,“世界数学通史”,“几何原本”,“什么是数学”四门选修课程,要求数学系每位同学每学年至多选3门,大一到大三3学年必须将四门选修课程选完,则每位同学的不同选修方式有
- A. 60种 B. 78种 C. 84种 D. 144种
8. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,满足 $f(2-x)=f(x)$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=-1$,且 $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$,则 $f(a_{22})=$
- A. 0 B. -1 C. 21 D. 22

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 已知向量 a, b 满足 $|a|=|b|=1$,且 $|b-2a|=\sqrt{5}$,则下列结论正确的是
- A. $a\perp b$ B. $|a+b|=2$
 C. $|a-b|=\sqrt{2}$ D. $\langle a, b \rangle=60^\circ$
10. 下列命题为真命题的是
- A. 对具有线性相关关系的变量 x, y ,有一组观测数据 $(x_i, y_i)(i=1, 2, \dots, 10)$,其线性回归方程是 $\hat{y}=-2\hat{b}x+1$,且 $x_1+x_2+x_3+\dots+x_{10}=3(y_1+y_2+y_3+\dots+y_{10})=9$,则实数 $\hat{b}$ 的值是 $\frac{11}{18}$
- B. 从数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 中任取 2 个数,则这 2 个数的和为奇数的概率为 $\frac{4}{7}$
- C. 已知样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差为 4,则数据 $2x_1+30, 2x_2+30, \dots, 2x_n+30$ 的标准差是 4
- D. 已知随机变量 $X\sim N(1, \sigma^2)$,若 $P(X<-1)=0.3$,则 $P(X<2)=0.7$
11. 以下四个命题表述正确的是
- A. 直线 $(3+m)x+4y-3+3m=0(m\in\mathbf{R})$ 恒过定点 $(-3, -3)$
- B. 圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有 3 个点到直线 $l: x-y+\sqrt{2}=0$ 的距离都等于 1
- C. 曲线 $C_1: x^2+y^2+2x=0$ 与曲线 $C_2: x^2+y^2-4x-8y+m=0$ 恰有三条公切线,则 $m=4$
- D. 已知圆 $C: x^2+y^2=4$,点 P 为直线 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ 上一动点,过点 P 向圆 C 引两条切线 PA, PB, A, B 为切点,则直线 AB 经过定点 $(1, 2)$

12. 在正方体 AC_1 中, E 是棱 CC_1 的中点, F 是侧面 BCC_1B_1 内的动点, 且 A_1F 与平面 D_1AE 的垂线垂直, 如图所示, 下列说法正确的是



- A. 点 F 的轨迹是一条线段
 B. A_1F 与 BE 是异面直线
 C. A_1F 与 D_1E 不可能平行
 D. 三棱锥 $F-ABD_1$ 的体积为定值

选择题答题卡

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案												

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x_0) = -2$, 则 $x_0 =$ _____.

14. 若点 P 是曲线 $y = x^2 - \ln x$ 上任意一点, 则点 P 到直线 $y = x - 2$ 的最小值为 _____.

15. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点, M 是 C 上一点, FM 的延长线交 y 轴于点 N , 若 M 为 FN 的中点, 则 $|FN| =$ _____.

16. 某校数学课外小组在坐标纸上, 为学校的一块空地设计植树方案如下: 第 k 棵树种植在点 $P_k(x_k, y_k)$ 处, 其中 $x_1 = 1, y_1 = 1$, 当 $k \geq 2$ 时,

$$\begin{cases} x_k = x_{k-1} + 1 - 5 \left[T\left(\frac{k-1}{5}\right) - T\left(\frac{k-2}{5}\right) \right], \\ y_k = y_{k-1} + T\left(\frac{k-1}{5}\right) - T\left(\frac{k-2}{5}\right). \end{cases}$$

$T(a)$ 表示非负实数 a 的整数部分, 例如 $T(2.6) = 2, T(0.2) = 0$. 按此方案,

- (i) 第 6 棵树种植点的坐标应为 _____;
 (ii) 第 2008 棵树种植点的坐标应为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} a_{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2}, & n \text{ 为正奇数}, \\ 2a_{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2}, & n \text{ 为正偶数}. \end{cases}$

(1) 问数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列或等比数列? 说明理由.

(2) 求证: 数列 $\left\{\frac{a_{2^n}}{2^n}\right\}$ 是等差数列, 并求数列 $\{a_{2^n}\}$ 的通项公式.

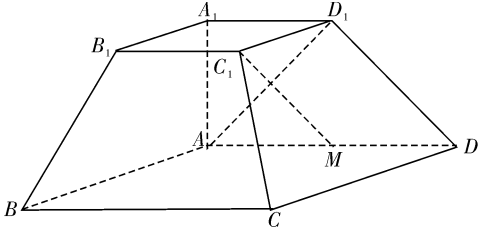
18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a+c=2b\cos A$.

(1) 证明: $B=2A$;

(2) 设 D 为 BC 边上的中点, 点 E 在 AB 边上, 满足 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CA}$,

且 $b=\sqrt{3}a$, 四边形 $ACDE$ 的面积为 $\frac{15\sqrt{3}}{8}$, 求线段 CE 的长.

19. (12 分) 如图, 在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 为菱形, $AA_1 = A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = 1$, $\angle ABC = 60^\circ$, $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$.



- (1) 若点 M 是 AD 的中点, 求证: $C_1M \perp A_1C$;
- (2) 棱 BC 上是否存在一点 E , 使得二面角 $E-AD_1-D$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$?
若存在, 求线段 CE 的长; 若不存在, 请说明理由.

20. (12 分)某新型双轴承电动机需要装配两个轴承才能正常工作,且两个轴承互不影响. 现计划购置甲,乙两个品牌的轴承,两个品牌轴承的使用寿命及价格情况如下表:

品牌	价格/(元/件)	使用寿命/月
甲	1000	7 或 8
乙	400	3 或 4

已知甲品牌使用 7 个月或 8 个月的概率均为 $\frac{1}{2}$,乙品牌使用 3 个月或 4 个月的概率均为 $\frac{1}{2}$.

- (1)若从 4 件甲品牌和 2 件乙品牌共 6 件轴承中,任选 2 件装入电动机内,求电动机可工作时间不少于 4 个月的概率;
- (2)现有两种购置方案,方案一:购置 2 件甲品牌;方案二:购置 1 件甲品牌和 2 件乙品牌(甲、乙两品牌轴承搭配使用). 试从性价比(即电动机正常工作时间与购置轴承的成本之比)的角度考虑,选择哪一种方案更实惠?

21. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 的焦

距相等, 且 C 经过抛物线 $y = (x-1)^2 + \sqrt{2}$ 的顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 $y = kx + m$ 与 C 相交于 A, B 两点, 且 A, B 关于直线 $l: x + ty + 1 = 0$ 对称, O 为 C 的对称中心, 且 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{\sqrt{10}}{3}$, 求 k 的值.

22. (12 分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}x^3 + a$, $g(x) = xe^{1-x} + \frac{2a-1}{2}x^3 -$

x ($a \in \mathbf{R}$, e 为自然对数的底数).

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 上有零点, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $x \geq 1$ 时, 不等式 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.