

数 学

命题人:伊波 审题人:雅礼中学高三数学备课组

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, $B = \{x | 2x - 3 > 0\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(-3, -\frac{3}{2})$ B. $(-3, \frac{3}{2})$ C. $(1, \frac{3}{2})$ D. $(\frac{3}{2}, 3)$

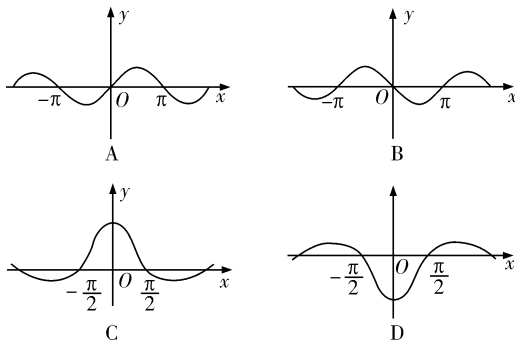
2. 若 $z = 1 + 2i$, 则 $\frac{4i}{z \cdot \bar{z} - 1} =$

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

3. 设 $a = 6^{0.4}$, $b = \log_{0.4} 0.5$, $c = \log_8 0.4$, 则 a, b, c 的大小关系是

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < c < a$

4. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为



5. 某人在同一群体中调查了人们对 6 杯饮品口味的看法, 得到数据如表:

饮品	第 1 杯	第 2 杯	第 3 杯	第 4 杯	第 5 杯	第 6 杯
好评率	0.13	0.52	0.22	0.45	0.98	0.30
差评率	0.87	0.48	0.78	0.55	0.02	0.70

根据这些数据, 可知这一群体意见分歧较大的两杯饮品是

- A. 第 1 杯与第 3 杯 B. 第 2 杯与第 4 杯
C. 第 1 杯与第 5 杯 D. 第 3 杯与第 5 杯

6. 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的左焦点 F_1 作一条直线 l 交双曲线左支于 P, Q 两点, 若 $|PQ| = 4$, F_2 是双

曲线的右焦点, 则 $\triangle PF_2Q$ 的周长是

- A. 6 B. 8 C. 10 D. 12

7. 《掷铁饼者》取材于古希腊的体育竞技活动, 刻画的是一名强健的男子在掷铁饼过程中最具有表现力的瞬间. 现在把掷铁饼者张开的双臂及肩近似看成一张

“弓”, 掷铁饼者的肩宽约为 $\frac{\pi}{8}$ 米, 一只手臂长约为 $\frac{\pi}{4}$ 米, “弓”所在圆的半径约为

$\frac{15}{16}$ 米, 则掷铁饼者双手之间的直线距离约为

- A. $\frac{15}{16}$ 米 B. $\frac{15\sqrt{2}}{16}$ 米
C. $\frac{15\sqrt{3}}{16}$ 米 D. $\frac{15\sqrt{3}}{32}$ 米



8. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + t (\omega > 0)$, 点 P, Q, R 是直线 $y = m (m > 0)$ 与函数 $f(x)$ 的图象自

左至右的某三个相邻交点, 且 $2|PQ| = |QR| = \frac{2\pi}{3}$. 若对 $\forall a, b, c \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 以 $f(a), f(b), f(c)$ 的

值为边长可以构成一个三角形, 那么实数 t 的取值范围是

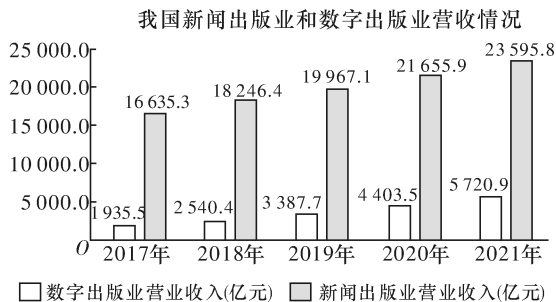
- A. $(1, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(3, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

二、选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 若 $b < a < 0$, 则下列结论正确的是

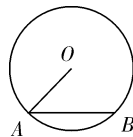
- A. $a^2 < b^2$ B. $ab < b^2$
C. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ D. $|a| + |b| > |a + b|$

10. 新闻出版业不断推进供给侧结构性改革, 深入推动优化升级和融合发展, 持续提高优质出版产品供给, 实现了行业的良性发展. 下面是 2017 年至 2021 年我国新闻出版业和数字出版业营收情况, 则下列说法正确的是



- A. 2017 年至 2021 年我国新闻出版业和数字出版业营收均逐年增加
B. 2021 年我国数字出版业营收超过 2017 年我国数字出版业营收的 2 倍
C. 2021 年我国新闻出版业营收超过 2017 年我国新闻出版业营收的 1.5 倍
D. 2021 年我国数字出版业营收占新闻出版业营收的比例未超过三分之一

11. 如图, AB 是圆 O (O 为圆心) 的一条弦, 由下列一个条件能确定 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$ 值的有



- A. 已知圆的半径长
- B. 已知弦长 $|AB|$
- C. 已知 $\angle OAB$ 大小
- D. 已知圆的半径长和 $\angle OAB$ 大小

12. 已知函数 $y=f(x)$, $x \in A$, 且 $\pi \in A$, 函数 $y=f(x)$, $x \in A$ 的图象绕坐标原点顺时针旋转 $\frac{n\pi}{4}$ 所得新的函数图象与原函数图象重合, 其中 n 可以取任意正整数, 则 $f(\pi)$ 的值不可能为

- A. 0
- B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$
- C. π
- D. $\sqrt{3}\pi$

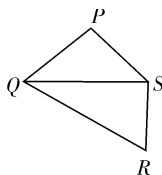
三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_2=3$, $S_4=15$, 则公比 q 等于_____.

14. 若抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(2, y_0)$ 到其准线的距离为 4, 则抛物线的标准方程为_____.

15. 某学校从 6 男 2 女共 8 名学生中选出队长 1 人, 副队长 1 人, 普通队员 2 人组成 4 人乒乓球队, 要求球队中至少有 1 名女生, 则共有_____种不同的选法.

16. 如图, 在平面四边形 $PQRS$ 中, $\angle QPS=\frac{\pi}{2}$, $\angle QSR=\frac{\pi}{2}$, $PQ=PS=SR=2$. 将该



平面图形沿线 QS 折成一个直二面角 $P-QS-R$, 三棱锥 $P-QRS$ 的体积为_____;

三棱锥 $P-QRS$ 的外接球的体积为_____.

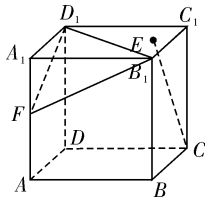
四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分)

如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面内有一点 E , 点 F 为线段 AA_1 的中点.

(1) 经过点 E 在上底面画出一条线 l 与 CE 垂直, 并说明画出这条线的理由;

(2) 若点 E 为线段 A_1C_1 靠近 C_1 的三等分点, 求 CE 与平面 FB_1D_1 所成角的正切值.



18. (本题满分 12 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a=1, b=2, \cos C=\frac{1}{4}$.

(1) 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(2) 求 $\cos(A-C)$ 的值.

19. (本题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n=2^n-1$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2, b_{n+1}-2b_n=8a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. (本题满分 12 分)

某工厂的一条流水线上生产一种产品, 已知该产品的合格率为 0.98. 为了监控该流水线的生产情况, 检验员每隔 6 个小时就需要从流水线上随机抽取 5 件产品进行检验(检验后的产品按废品处理, 每天检验 4 次), 如发现其中有不合格品, 则马上去调整生产设备. 各产品是否为不合格品是相互独立的.

(1) 求每次检验后, 需要调整设备的概率(结果保留两位小数).

(2) 用 X 表示检验员一天内需要调整设备的次数, 求 X 的分布列及数学期望.

(3) 用 Y 表示检验员一周(7 天)内共发现的不合格品数, 用这一周内不合格品数的比例估计该产品的不合格品率, 求其绝对误差(即估计值与真实值之差的绝对值)不超过 0.005 的概率(结果保留两位小数).

参考数据: $0.98^3 \approx 0.94$, $0.98^4 \approx 0.92$, $0.98^5 \approx 0.90$, $C_{140}^5 0.98^{135} \approx 27102759$, $C_{140}^4 0.98^{136} \approx 981095$, $C_{140}^3 0.98^{137} \approx 28198$, $C_{140}^2 0.98^{138} \approx 603$.

21. (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax \ln x - bx^2 - ax$.

(1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x + y + \frac{1}{2} = 0$, 求 a, b 的值;

(2) 若 $a \leq 0, b = \frac{1}{2}$ 时, $\forall x_1, x_2 \in (1, e)$, 都有 $\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} < 3$, 求 a 的取值范围.

22. (本题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 连接椭圆上任意两点的线段叫作椭圆的弦, 过椭圆中心的弦叫做椭圆的直径. 若椭圆的两直径的斜率之积为 $-\frac{b^2}{a^2}$, 则称这两直径为椭圆的共轭直径. 特别地, 若一条直径所在的斜率为 0, 另一条直径的斜率不存在时, 也称这两直径为共轭直径. 现已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(1) 已知点 $A(1, \frac{3}{2}), B(-1, -\frac{3}{2})$ 为椭圆 E 上两定点, 求 AB 的共轭直径的端点坐标.

(2) 过点 $(-\sqrt{3}, 0)$ 作直线 l 与椭圆 E 交于 A_1, B_1 两点, 直线 A_1O 与椭圆 E 的另一个交点为 A_2 , 直线 B_1O 与椭圆 E 的另一个交点为 B_2 . 当 $\triangle A_1OB_1$ 的面积最大时, 直径 A_1A_2 与直径 B_1B_2 是否共轭, 请说明理由.

(3) 设 CD 和 MN 为椭圆 E 的一对共轭直径, 且线段 CM 的中点为 T . 已知点 P 满足: $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OT}$, 若点 P 在椭圆 E 的外部, 求 λ 的取值范围.