

高三数学参考答案

选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	C	D	C	B	C	A	BD	ABC	AB	ABD

6.B 解析：设小李这两次加油的油价分别为 x 元/升、 y 元/升，则方案一：两次加油平均价格为

$$\frac{40x+40y}{80} = \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}; \text{ 方案二：两次加油平均价格为 } \frac{400}{\frac{200}{x} + \frac{200}{y}} = \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy}.$$

故无论油价如何起伏，方案二比方案一更划算.

7.C 解析： $\angle AOB = \frac{3\pi}{4}$ ， P 是弧 AB 上的一个三等分点，故 $\angle POB = \frac{\pi}{2}$ ， $\angle POA = \frac{\pi}{4}$ ，

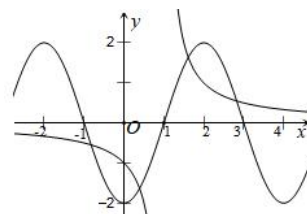
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{PO}^2 + \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} \\ &= 4 + 0 + 2 \cdot |\overrightarrow{OM}| \cos \frac{3\pi}{4} + |\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{ON}| \cos \frac{3\pi}{4} = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} |\overrightarrow{OM}| \cdot (2 + |\overrightarrow{ON}|) \leq 4 \end{aligned}$$

故当 $|\overrightarrow{OM}| = 0$ 时， $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 取最大值 4.

8.A 解析：令 $f(x) = 0$ ，得 $\frac{1}{x-1} = -2\cos(\frac{\pi}{2}x)$ ，函数 $f(x)$ 的零点就是函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 与函数 $y = -2\cos(\frac{\pi}{2}x)$

图象交点的横坐标. 又函数 $y = \frac{1}{x-1}$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，函数

$y = -2\cos(\frac{\pi}{2}x)$ 的周期为 4，其图象也关于点 $(1,0)$ 对称，画出两函数图象如图：



共有 4 个交点，这 4 个点两两关于点 $(1,0)$ 对称，故其横坐标的和为 4.

9. BD 解析：对于 A，由频率分布直方图性质得： $(a+0.02+0.035+0.025+a) \times 10 = 1$ ，解得 $a = 0.01$ ，故 A 错误；

对于 B，由频率分布直方图得成绩落在 $[60,70)$ 的概率为 0.2， $0.2 \times 120 = 24$ ，故 B 正确；

对于 C，由频率分布直方图得： $[50,70)$ 的频率为 $(0.01+0.02) \times 10 = 0.3$ ， $[70,80)$ 的频率为 $0.035 \times 10 = 0.35$ ， $\therefore$ 成绩的中位数位于 $[70,80)$ 内，故 C 错误；

对于 D , 估计成绩的平均数为: $\bar{x} = 55 \times 0.01 \times 10 + 65 \times 0.02 \times 10 + 75 \times 0.035 \times 10 + 85 \times 0.025 \times 10 + 95 \times 0.01 \times 10 = 75.5$

$\therefore$ 成绩的平均数落在 $[70, 80)$ 内, 故 D 正确. 故选: BD .

10. ABC 解析: 由 $\log_3 x - \log_3 y < \left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^y$ 变形得 $\log_3 x - \left(\frac{1}{3}\right)^x < \log_3 y - \left(\frac{1}{3}\right)^y$, 令函数 $f(x) = \log_3 x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$, 已知函数在定义域上单调递增, 所以 $0 < x < y$, 则 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$, A 正确; $x^3 < y^3$, B 正确; $x - y < 0$, 所以 $2^{x-y} < 1$, C 正确; $y - x > 0$, $\ln(y - x)$ 的符号无法判断, D 错. 故选: ABC .

11. AB 解析: $f(x) = 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = \sin 2x - 1 - \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$, 对于 A 选项, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ 时, $2x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, 函数 $y = f(x)$ 为增函数, A 正确; 令 $2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 当 $k = 0$ 时, $x = \frac{3\pi}{8}$, 所以直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 是函数 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴, B 正确;

函数 $y = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到函数 $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象, C 错误; 函数 $y = f(x)$ 关于 $\left(\frac{\pi}{8}, -1\right)$ 对称, D 选项错误, 故选: AB .

12. ABD 解析: 连结 AC, D_1A, BC_1 . $\because B_1C \perp BC_1, B_1C \perp AB$, $\therefore B_1C \perp$ 面 ABC_1D_1 . 又 $\because D_1E \subset$ 面 ABC_1D_1 , $\therefore B_1C \perp D_1E$ 故 A 选项是正确的; 又 $\because EF \parallel AC, AD_1 \parallel GE$, $\therefore$ 面 $AD_1C \parallel$ 面 GEF , 又 $\because D_1C \subset$ 面 AD_1C , $\therefore D_1C \parallel$ 面 GEF . $\therefore B$ 选项是正确的. 若 P 在平面 $ABCD$ 内, 且 $D_1P \parallel$ 面 GEF , 则 P 的轨迹是直线 AC , 此时 D_1P 的最小值为 $D_1P \perp AC$ 时. 在 $\triangle D_1AC$ 中, $AD_1 = \sqrt{2}$, $D_1C = 2$, $AC = 2$, $\because D_1P \perp AC \therefore D_1P = AD_1 \cdot \sin \angle D_1AC = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2} \therefore C$ 选项是错误的. $\because B_1C \perp$ 面 ABC_1D_1 , 且 $D_1Q \perp B_1C$, $\therefore$ 点 Q 的轨迹是直线 AB , $\therefore D_1Q$ 的最小值是 $D_1Q \perp AB$ 时, 即 Q 与 A 重合, 此时, $D_1A = \sqrt{2}$, $\therefore D$ 选项是正确的, 故选: ABD .

三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 2π

14. 810

15. 3

16. 45

15.3 解析：设内切圆半径为 r ，则

$$S_{\triangle O_1 F_2 P} : S_{\triangle O_1 F_1 P} : S_{\triangle O_1 F_1 F_2} = \frac{1}{2} |PF_2| r : \frac{1}{2} |PF_1| r : \frac{1}{2} |F_1 F_2| r = |PF_2| : |PF_1| : |F_1 F_2| = 1 : 2 : 3,$$

故 $|PF_2| = \frac{1}{3} |F_1 F_2| = \frac{2}{3} c$ ， $|PF_1| = \frac{2}{3} |F_1 F_2| = \frac{4}{3} c$ ，又 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ ，即 $\frac{2}{3} c = 2a$ ，故 $e = 3$ 。

16.45 解析：设 B 同学的声强为 m ，喷出泉水高度为 x ，则 A 同学的声强为 $10m$ ，喷出泉水高度为 50，

$$10 \lg \frac{m}{m_0} = 2x \Rightarrow \lg m - \lg m_0 = 0.2x, \quad 10 \lg \frac{10m}{m_0} = 2 \times 50 \Rightarrow 1 + \lg m - \lg m_0 = 10,$$

相减得 $1 = 10 - 0.2x \Rightarrow 0.2x = 9 \Rightarrow x = 45$ 。故答案为 45。

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分）

17. 解析：（1）选择条件①. $\because 2a - \sqrt{2}c = 2b \cos C$ ， $\therefore 2 \sin A - \sqrt{2} \sin C = 2 \sin B \cos C$

$$\therefore 2 \sin B \cos C + 2 \cos B \sin C - \sqrt{2} \sin C = 2 \sin B \cos C, \text{得 } \cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \tan B = 1 \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

选择条件②由题意得 $2ac \cos B = 2ac \sin B$ ，得 $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 1$. \dots\dots 5 \text{ 分}

（2）由 $\tan B = 1$ 得 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\because S = 10$ ， $a = 5$ ，

$$\therefore S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 5c \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10, \text{解得 } c = 4\sqrt{2}. \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos B} = \sqrt{25 + 32 - 2 \times 5 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{17} \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 解析：（1）设等比数列公比为 q ，依题有 $a_n > 0, q > 0$ ， $2a_4 = 4a_2 + 2a_3$ ，即 $a_1 q^3 = 2a_1 q + a_1 q^2$ ，即 $q^2 - q - 2 = 0$ ， $\therefore q = 2, q = -1$ （舍）

又 $a_3 = 2a_1^2$, 即 $a_1 \times 4 = 2 \times a_1^2$, $\therefore a_1 = 2$. $\therefore a_n = 2^n$ 6 分

$$(2) \quad b_n = \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1},$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^2-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

19. 解析: (1) $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore BC \perp PA$.

又 $BC \perp AB$, $AB \cap AP = A$, $AB, AP \subset$ 平面 PAB , $\therefore BC \perp$ 平面 PAB ,

又 $AF \subset$ 平面 PAB , $\therefore AF \perp BC$ 3 分

又 $PA = AB = 1$, F 是 PB 的中点, $\therefore AF \perp PB$,

又 $\because PB \cap BC = B, PB, BC \subset$ 平面 PBC , $\therefore AF \perp$ 平面 PBC 5 分

(2) 以 AD, AB, AP 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示.

$\because PD$ 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{3}$, $AP = 1$, $\therefore AD = 3$,

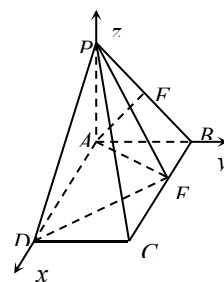
则 $P(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $D(3,0,0)$.

设 $BE = x (0 \leq x \leq 3)$, 则 $E(x,1,0)$, 7 分

设平面 PDE 的法向量为 $\vec{m} = (x_0, y_0, z_0)$, 由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PD} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{PE} = 0 \end{cases}$, 得: $\vec{m} = (1, 3-x, 3)$, 9 分

而平面 ADE 的一个法向量为 $\vec{AP} = (0,0,1)$, 依题意得: $\frac{|\vec{m} \cdot \vec{AP}|}{|\vec{m}| |\vec{AP}|} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$,

即 $\frac{3}{\sqrt{10+(3-x)^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14}$, 得 $x=1$ 或 $x=5$ (舍). 故 $BE=1$ 12 分



20. 解析: (1) 由题意得, 2×2 列联表如下:

	属于“追光族”	属于“观望者”	合计
女员工	2	8	10

男员工	10	8	18
合计	12	16	28

..... 2 分

$K^2 = \frac{28 \times (2 \times 8 - 8 \times 10)^2}{12 \times 16 \times 10 \times 18} = \frac{448}{135} \approx 3.32 < 3.841$, 故没有 95% 的把握认为该公司员工属于“追光族”与“性别”有关;

..... 5 分

(2) 由 (1) 知在样本里属于“追光族”的员工有 12 人. 其中男员工 10 人, 女员工 2 人.

所以 ξ 可能的取值有 0, 2, 4. $P(\xi = 4) = P(X = 4 \text{ 且 } Y = 0) = \frac{C_{10}^4 C_2^0}{C_{12}^4} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$;

$P(\xi = 2) = P(X = 3 \text{ 且 } Y = 1) = \frac{C_{10}^3 C_2^1}{C_{12}^4} = \frac{240}{495} = \frac{16}{33}$; $P(\xi = 0) = P(X = 2 \text{ 且 } Y = 2) = \frac{C_{10}^2 C_2^2}{C_{12}^4} = \frac{45}{495} = \frac{1}{11}$9 分

所以 ξ 的分布列为:

ξ	0	2	4
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{16}{33}$	$\frac{14}{33}$

所以 ξ 的期望 $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{11} + 2 \times \frac{16}{33} + 4 \times \frac{14}{33} = \frac{8}{3}$.

.....12 分

21. 解析: (1) 依题意: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 6 \\ a^2 - b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 2 \end{cases}$, $\therefore$ 椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;4 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 AB 的中点 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ 在线段 OM 上, 且 $k_{OM} = 2$, 则

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2), \text{ 又 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 两式相减得: } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{2} = 0$$

易知: $x_1 + x_2 \neq 0, y_1 + y_2 \neq 0$, $\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{4}$,

.....6 分

设直线 AB 的方程为 $y = -\frac{1}{4}x + m$, 联立 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 得: $9x^2 - 8mx + 16m^2 - 32 = 0$.

$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8m}{9}, x_1 x_2 = \frac{16m^2 - 32}{9}$, 由 $\Delta = 64m^2 - 4 \times 9 \times (16m^2 - 32) > 0 \Rightarrow m^2 < \frac{9}{4}$.

又 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4m}{9} \in (0, \frac{2}{3}) \Rightarrow m \in (0, \frac{3}{2}), \therefore 0 < m < \frac{3}{2}$ 8 分

$|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{16} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}} = \frac{2\sqrt{17}\sqrt{18-8m^2}}{9}, d_{O-AB} = \frac{|4m|}{\sqrt{17}},$ 10 分

$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{8m}{9}\sqrt{72-32m^2} = \frac{4}{9}\sqrt{18m^2-8m^4}.$

又 $m \in (0, \frac{3}{2}), \therefore S_{\triangle AOB} \in (0, \sqrt{2}]$ 12 分

22、解析：（1） $\because f'(x) = a \ln x - \frac{1}{x} \therefore f'(e) = a - \frac{1}{e},$

又 $f(e) = 0, \therefore g(x) = (a - \frac{1}{e})(x - e).$ 3 分

（2）令 $F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f'(e)(x - e),$

$\therefore F'(x) = f'(x) - f'(e) = a \ln x - \frac{1}{x} - a + \frac{1}{e}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且 $F'(e) = 0,$

$\therefore$ 当 $0 < x < e$ 时 $F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减，当 $x > e$ 时 $F'(x) > 0, F(x)$ 单调递增， 5 分

$\therefore F(x) \geq F(e) = 0$ 恒成立， $\therefore f(x) \geq g(x)$ 恒成立. 6 分

（3）当 $a = 1$ 时， $f(x) = (\ln x - 1)(x - 1)$ ，则 $f'(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ ，显然 $f'(x)$ 在定义域内单调递增，而

$f'(1) = -1 < 0, f'(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0, \therefore$ 存在 $x_0 \in (1, e)$ ，使 $f'(x_0) = 0.$

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时， $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减；当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增 8 分

令 $f(x) = 0$ 解得 $x = 1$ 或 e . 由（1）（2）可知 $y = f(x)$ 在 $(e, 0)$ 处的切线方程为 $g(x) = (1 - \frac{1}{e})(x - e)$ ，且

$f(x) \geq g(x)$ 恒成立，同理可得 $y = f(x)$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $h(x) = -x + 1$ ，

令 $H(x) = f(x) - h(x) = (\ln x - 1)(x - 1) - (-x + 1) = (x - 1) \ln x,$

当 $x > 1$ 时， $x - 1 > 0, \ln x > 0$ ，当 $0 < x < 1$ 时， $x - 1 < 0, \ln x < 0$ ，

$\therefore H(x) \geq 0$ 恒成立. 10 分

设函数 $y = f(x)$ 在两个零点处的切线方程与直线 $y = m$ 的交点的横坐标分别为 x_1' 和 x_2' , 不妨设 $x_1 < x_2$,

则 $x_1 > x_1'$, $x_2 < x_2'$, 令 $g(x) = h(x) = m$, 解得 $x_2' = \frac{em}{e-1} + e$, $x_1' = 1 - m$, 11 分

$\therefore |x_2 - x_1| < |x_2' - x_1'| = m(1 + \frac{e}{e-1}) + e - 1$, 得证. 12 分