

绝密★启用前

湖南省五市十校 2020 年下学期高三年级第二次大联考试题
数 学

命题: 宁乡一中 雷锋学校 东山学校

本试卷共 4 页。全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设复数 $z = \frac{1-i}{i} + 2i$, 则 $|z| =$

A. 0

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. 2

2. 已知 $\sin\theta > 0, \cos(\theta - \pi) > 0$, 则 θ 是

A. 第一象限角

B. 第二象限角

C. 第三象限角

D. 第四象限角

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d, b_n = 2^{a_n}$, 则“ $d < 0$ ”是“ $\{b_n\}$ 为递减数列”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 陈镜开(1935~2010), 新中国举重运动员, 1956 年在上海举行的“中苏举重友谊赛”中, 他以 133 公斤的成绩, 打破美国运动员 C·温奇保特的 56 公斤级挺举世界纪录, 这是中国运动员创造的第一个世界纪录. 1956~1964 年期间, 在上海、北京、莫斯科、莱比锡等国内外的重大举重比赛中, 陈镜开先后 9 次打破最轻量级和次轻量级挺举世界纪录. 举重比赛挺举项目中, 运动员对所举重量有 3 次试举次数, 只要一次试举成功即为完成本次所要重量的比赛, 才有资格进入下轮所要更大重量的比赛. 结合平时训练数据, 某运动员挺举 130 公斤成功的概率为 0.6 (每次试举之间互不影响), 则在挺举比赛中, 他有资格进入下轮比赛的概率是

A. 0.784

B. 0.84

C. 0.904

D. 0.936

5. 已知直线 $l: x + y - 1 = 0$, 圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$, 则圆 C 上到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

6. 原油作为“工业血液”、“黑色黄金”, 其价格的波动牵动着整个化工产业甚至世界经济. 小李在某段时间内共加油两次, 这段时间燃油价格有升有降. 现小李有两种加油方案: 第一种方案是每次加油 40 升, 第二种方案是每次加油 200 元, 则下列说法正确的是

A. 第一种方案更划算

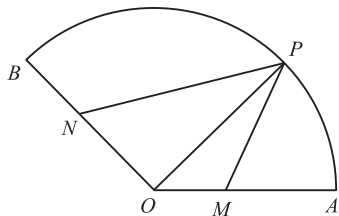
B. 第二种方案更划算

C. 两种方案一样

D. 无法确定

7. 如图, 在半径为 2 的扇形 AOB 中, $\angle AOB = \frac{3\pi}{4}$, P 是弧 AB 上的一个三等分点, M, N 分别是线段 OA, OB 上的动点, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最大值为

A. $\sqrt{2}$ B. 2
C. 4 D. $4\sqrt{2}$

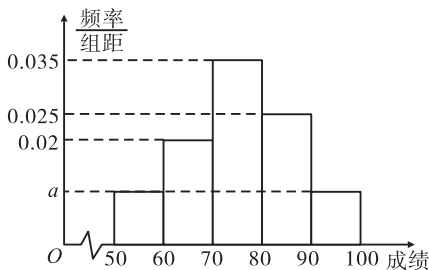


8. 函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\cos(\frac{\pi}{2}x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的所有零点的和为

A. 4 B. 6 C. 4π D. 6π

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分。

9. 某校对 120 名考生的数学竞赛成绩进行统计, 分成 $[50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$ 五组, 得到如图



- 所示频率分布直方图, 则下列说法正确的是
- A. $a = 0.008$
B. 该校学生数学竞赛成绩落在 $[60, 70)$ 内的考生人数为 24
C. 该校学生数学竞赛成绩的中位数大于 80
D. 估计该校学生数学竞赛成绩的平均数落在 $[70, 80)$ 内

10. 已知实数 x, y 满足 $\log_3 x - \log_3 y < (\frac{1}{3})^x - (\frac{1}{3})^y$, 则下列结论正确的是

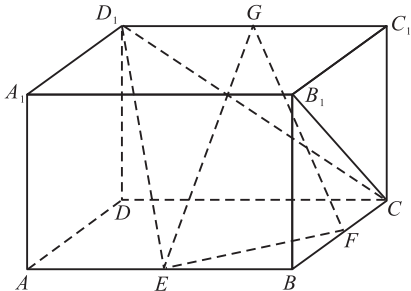
A. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ B. $x^3 < y^3$ C. $2^{x-y} < 1$ D. $\ln(y-x) > 0$

11. 已知函数 $f(x) = 2\cos x(\sin x - \cos x)$, 则下列结论正确的是

- A. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{8})$ 上为增函数
B. 直线 $x = \frac{3\pi}{8}$ 是函数 $y = f(x)$ 图像的一条对称轴
C. 函数 $y = f(x)$ 的图像可由函数 $y = \sin 2x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位得到
D. 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(\frac{\pi}{8}, 0)$ 对称

12. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = DD_1 = 1, AB = \sqrt{3}$, E, F, G 分别是 AB, BC, C_1D_1 的中点, 则下列说法正确的是

- A. $B_1C \perp D_1E$
B. $D_1C \parallel$ 平面 GEF
C. 若点 P 在平面 $ABCD$ 内, 且 $D_1P \parallel$ 平面 GEF , 则线段 D_1P 长度的最小值为 $\sqrt{2}$
D. 若点 Q 在平面 $ABCD$ 内, 且 $D_1Q \perp B_1C$, 则线段 D_1Q 长度的最小值为 $\sqrt{2}$



三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 一个圆锥的轴截面是边长为 2 的等边三角形, 则该圆锥的侧面积为_____.

14. $(2x^2 - \frac{3}{x})^5$ 的展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为_____.

15. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, P 是双曲线 C 的右支上一点, O_1 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, 且 $S_{\triangle O_1F_2P} : S_{\triangle O_1F_1P} : S_{\triangle O_1F_1F_2} = 1 : 2 : 3$, 则 C 的离心率为 _____.
16. “喊泉”是一种地下水的毛细现象, 人们在泉口吼叫或发出其他声音时, 声波传入泉洞内的储水池, 进而产生“共鸣”等物理声学作用, 激起水波, 形成涌泉. 声音越大, 涌起的泉水越高. 已知听到的声强 m 与标准声调 m_0 (m_0 约为 10^{-12} , 单位: W/m^2) 之比的常用对数称作声强的声强级, 记作 L (贝尔), 即 $L = \lg \frac{m}{m_0}$, 取贝尔的 10 倍作为响度的常用单位, 简称为分贝. 已知某处“喊泉”的声音响度 y (分贝) 与喷出的泉水高度 x (米) 满足关系式 $y = 2x$, 现知 A 同学大喝一声激起的涌泉最高高度为 50 米, 若 A 同学大喝一声的声强大约相当于 10 个 B 同学同时大喝一声的声强, 则 B 同学大喝一声激起的涌泉最高高度约为 _____ 米.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

在 ① $2a - \sqrt{2}c = 2b \cos C$; ② $a^2 + c^2 - b^2 = 4S$, 这两个条件中任选一个, 补充在下面问题中, 然后解答补充完整的题目.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 已知 _____.

(1) 求 $\tan B$ 的值;

(2) 若 $S = 10, a = 5$, 求 b 的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $a_3 = 2a_1^2$, a_4 是 $4a_2$ 与 $2a_3$ 的等差中项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

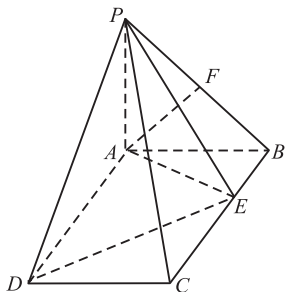
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是矩形, $AP = AB = 1$, PD 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{3}$, F 是 PB 的中点, E 是线段 BC 上的动点.

(1) 证明: $AF \perp$ 平面 PBC ;

(2) 若二面角 $P-DE-A$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{14}}{14}$, 求 BE 的长.



20. (12 分)

某公司有 1400 名员工,其中男员工 900 名,用分层抽样的方法随机抽取 28 名员工进行 5G 手机购买意向调查,将计划在今年购买 5G 手机的员工称为“追光族”,计划在明年及明年以后购买 5G 手机的员工称为“观望者”,调查结果发现抽取的这 28 名员工中属于“追光族”的女员工有 2 人,男员工有 10 人.

(1)完成下面 2×2 列联表,并判断是否有 95% 的把握认为该公司员工属于“追光族”与“性别”有关;

	属于“追光族”	属于“观望者”	合计
女员工			
男员工			
合计			28

(2)在抽取的属于“追光族”的员工中任选 4 人,记选出的 4 人中男员工有 X 人,女员工有 Y 人,求随机变量 $\xi=X-Y$ 的分布列与数学期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21. (12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{2}, 0)$,顺次连接椭圆 E 的四个顶点恰好构成一个边长为 $\sqrt{6}$ 的菱形.

- (1)求椭圆 E 的标准方程;
- (2)设 $M(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$, O 为坐标原点, A, B 是椭圆 E 上两点,且 AB 的中点在线段 OM (不含端点 O, M) 上,求 $\triangle AOB$ 面积 S 的取值范围.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = (\ln x - 1)(ax - 1) (a > 0)$, 设曲线 $y = f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线方程为 $y = g(x)$.

- (1)求 $g(x)$ 的解析式;
- (2)证明:对定义域内任意 x , 都有 $f(x) \geq g(x)$;
- (3)当 $a = 1$ 时,关于 x 的方程 $f(x) = m$ 有两个不等的实数根 x_1, x_2 , 证明: $|x_2 - x_1| < m(1 + \frac{e}{e-1}) + e - 1$.