

湖南省 2021 届高三六校联考试题

数学参考答案

一、二选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答 案	B	D	A	A	D	C	C	B	BD	ABD	BC	ACD

1. B 【解析】 $\because B = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 3\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, $\therefore A \cap \complement_{\mathbb{R}} B = \{1, 2, 3\}$, 故选 B.
2. D 【解析】 $\because z_1 \cdot z_2 = (3+ai)(2+i) = (6-a) + (2a+3)i$ 为纯虚数, $\therefore$ 由 $6-a=0$ 得 $a=6$, 故选 D.
3. A 【解析】易知函数 $f(x)$ 为奇函数, 排除 C、D; 又当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > 0$, 排除 B; 故选 A.
4. A 【解析】每名工作人员都有 3 种不同选择, 共有情形 $3^4 = 81$ 种, 则每个人只去一个村, 每个村至少有一名工作人员的情形有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ 种, $\therefore$ 所求概率为 $\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$, 故选 A.
5. D 【解析】 $|a| = \sqrt{6}$, $b = (m, 3)$, 由 $(b-a) \perp (2a+b)$ 得: $b^2 - 2a^2 + a \cdot b = 0$,
 $\therefore a \cdot b = 2a^2 - b^2 = 12 - (m^2 + 9) = 3 - m^2$, 则向量 a 在向量 b 方向上的投影为 $\frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{3-m^2}{\sqrt{m^2+9}}$,
 令 $t = \sqrt{m^2+9}$, 则 $m^2 = t^2 - 9$ 且 $t \geq 3$,
 $\therefore \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{3-m^2}{\sqrt{m^2+9}} = \frac{3-(t^2-9)}{t} = \frac{12-t^2}{t} = \frac{12}{t} - t$, 显然在 $[3, +\infty)$ 上递减,
 故当 $t=3$ 时, 投影取最大值 1, 故选 D.
6. C 【解析】由图易求: $OC = \frac{1}{2} AB = \frac{a+b}{2}$, $OD = |OB - BD| = \left| \frac{a+b}{2} - b \right| = \left| \frac{a-b}{2} \right|$,
 在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, 显然 $OC \leq CD$, 故选 C.
7. C 【解析】在焦点三角形 $\triangle PF_1 F_2$ 中, $2\sin \angle PF_1 F_2 = \sin \angle PF_2 F_1$, 由正弦定理得: $2|PF_2| = |PF_1|$,
 又 $\because |PF_1| - |PF_2| = 2a$, 可解得: $|PF_1| = 4a$, $|PF_2| = 2a$,
 三角形 $\triangle PF_1 F_2$ 中, 由 $|PF_1| + |PF_2| > |F_1 F_2|$ 得: $4a + 2a > 2c$, $\therefore e < 3$, 则 $1 < e < 3$, 故选 C.
8. B 【解析】设 $r \in \mathbb{Q}$, 则 $D(x+r) = D(x)$, 所以 $D(x)$ 为周期函数, 且任意非零有理数均为其周期, 故 A、D 不对; 又 $D(-x) = D(x)$, 所以 $D(x)$ 是偶函数, B 对. 故选 B.
9. BD 【解析】对于 A, 若两直线平行, 则它们的斜率都不存在或相等, 不正确; 对于 C, 若直线 a 的方向向量垂直于平面 α 的法向量, 则直线 $a \subset \alpha$ 或 $a \parallel \alpha$, 不正确, 故选 BD.
10. ABD 【解析】采用不完全归纳可得, 数列 $\{a_n\}$: 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, $\dots$, 不难求出 A、B 正确, 而 $a_{2n-1} = 2n-1$, 故 C 错误, 对于 D, 数列 $\{b_n\}$ 的前 100 项和为: $-1+3-3+5-5+7-7+9-\dots = 2 \times 50 = 100$, 故选 ABD.
 另解: 令 $n = 2k-1, k \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_{2k+1} - a_{2k-1} = 2$, 令 $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$, 有 $a_{2k+2} - a_{2k} = 2$, 故 $\{a_{2n-1}\}$ 为以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{a_{2n}\}$ 为以 3 为首项, 2 为公差的等差数列, 则 $a_{2n-1} = 2n-1, a_{2n} = 2n+1$, 易得 ABD 正确.

11. BC **【解析】**由题有 $T=\pi$, 则 $\omega=2$, 又由对称轴 $x=\frac{\pi}{12}$ 可得, $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$, 故 $f(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$, 对于 A, $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-1\neq 0$, 错误; 对于 B, $x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 则 $f(x)\in[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, 正确; 对于 C, $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$, 且 $\alpha\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $2\alpha\in(0, \pi)$, 故 $\cos 2\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$, 而 $f\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\alpha-\sqrt{3}\sin 2\alpha=\frac{4-3\sqrt{3}}{5}$, 正确; 对于 D, $f(x)=2\cos 2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$, 应将 $g(x)=2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位, 错误. 故选 BC.

12. ACD **【解析】**显然公共弦 AB 在棱 l 上, 连接 $OE, O_1E, O_2E, O_1O_2, OA$,

$$\text{则 } OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{3},$$

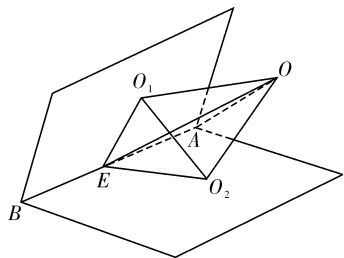
容易证明 O_1, O_2, O, E 四点共圆, 且 $\angle O_1EO_2=60^\circ$,

$$\therefore O_1O_2=OE\sin 60^\circ=\frac{3}{2}. \text{ 设 } OO_1=d_1, OO_2=d_2,$$

在 $\triangle OO_1O_2$ 中, 由余弦定理有

$$O_1O_2^2=\frac{9}{4}=d_1^2+d_2^2+d_1d_2\geq 3d_1d_2, \therefore d_1d_2\leq \frac{3}{4}, \therefore S_{\triangle O_1O_2}\leq \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

$$\therefore V=\frac{1}{3}\times AE\times S_{\triangle O_1O_2}\leq \frac{\sqrt{3}}{16}. \text{ 故选 ACD.}$$



三、填空题

13. 0.8186 **【解析】** $P(79<X\leq 109)=P(\mu-\sigma<X\leq \mu+2\sigma)$

$$=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma<X\leq \mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<X\leq \mu-2\sigma)=0.8186.$$

14. $f(x)=\sin \frac{5\pi}{2}x$ (答案不唯一) **【解析】**答案不唯一, 如: $f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2, f(x)=\sin \frac{5\pi}{2}x$ 等.

15. 17 **【解析】**令 $x=1$ 可得 $(a+1)\cdot 2^6=192$, 解得 $a=2$, 则展开式中的常数项为 $2\times C_6^0+C_6^2=17$.

16. 3 $2\times 3^r (r\in\mathbf{N}^*)$ **【解析】** $\because 7=1\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0, \therefore f(7)=3$.

设 $n=a_0\times 2^r+a_1\times 2^{r-1}+\cdots+a_{r-1}\times 2^1+a_r\times 2^0, f(n)=t+1$, 则使得 $f(n)=t+1$ 的 n 有 C_r^t 个,

$$\therefore \sum_{n=2^r}^{2^{r+1}-1} 2^{f(n)} = \sum_{t=0}^r C_r^t \times 2^{t+1} = 2\times 3^r (r\in\mathbf{N}^*).$$

四、解答题

17. **【解析】**(I) $\because 2S_n=n^2+3n,$

$$2S_{n-1}=(n-1)^2+3(n-1), n\geq 2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{两式相减得: } 2a_n=2n+2, \text{ 则 } a_n=n+1 (n\geq 2), \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

由 $2S_1=2a_1=4$ 知 $a_1=2$, 也满足上式,

$$\text{故 } a_n=n+1 (n\in\mathbf{N}^*), \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\Rightarrow T_n = \frac{n}{2(n+2)}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$T_n - \lambda a_{n+1} \geq 0 \Rightarrow \frac{n}{2(n+2)} - \lambda(n+2) \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq \frac{n}{2(n+2)^2},$$

由存在性得 $\lambda \leq \left[\frac{n}{2(n+2)^2} \right]_{\max}$ 8 分

而 $\frac{n}{2(n+2)^2} = \frac{1}{2\left(n+\frac{4}{n}+4\right)} \leq \frac{1}{16}$ (当且仅当 $n=2$ 时取等号),

故 $\lambda \in \left(-\infty, \frac{1}{16}\right]$ 10 分

18. 【解析】(I) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 1 = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$, 2 分

$\because x \in \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right], \therefore -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}, \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$,

$\therefore$ 当 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$, 即 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 得 $x = \frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取得最大值 0; 4 分

当 $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$, 得 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最小值 $-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ 6 分

(II) $\because f\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -1$ 且 $A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{6}$ 8 分

由余弦定理 $a^2 = c^2 + b^2 - 2 \times c \times b \cos A$ 得 $c^2 - 6\sqrt{3}c + 24 = 0$, 10 分

解得 $c = 4\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$ 12 分

另解: $\because f\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(A - \frac{\pi}{6}\right) - 1 = -1$ 且 $A \in (0, \pi), \therefore A = \frac{\pi}{6}$, 8 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 有 $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $B = \frac{\pi}{3}$ 或 $B = \frac{2\pi}{3}$, 9 分

当 $B = \frac{\pi}{3}$ 时, $c = \frac{\pi}{2}$, 由勾股定理有 $c = 4\sqrt{3}$ 10 分

当 $B = \frac{2\pi}{3}$ 时, $C = A = \frac{\pi}{6}$, 则 $c = a = 2\sqrt{3}$.

综上, $c = 4\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$ 12 分

19. 【解析】(I) 甲恰好胜 2 局的概率为 $P = C_3^0 0.6^2 \times 0.4 = 0.432$ 4 分

(II) ① 甲所胜局数 x 可取 0, 1, 2.

$P(x=0) = C_2^0 0.4^2 = 0.16$,

$P(x=1) = C_2^1 0.6 \times 0.4 \times 0.4 = 0.192$,

$P(x=2) = C_2^2 0.6 \times 0.6 + C_2^1 0.6 \times 0.4 \times 0.6 = 0.648$, 6 分

$\therefore$ 甲所胜局数 x 的分布列为

x	0	1	2
P	0.16	0.192	0.648

$E(x) = 0 \times 0.16 + 1 \times 0.192 + 2 \times 0.648 = 1.488$ 8 分

② 采用“3 局 2 胜制”时, 甲获胜的概率为

$P_1 = C_2^1 0.6 \times 0.4 \times 0.6 + C_2^2 0.6 \times 0.6 = 0.648$,

采用“5 局 3 胜制”时, 甲获胜的概率为

$P_2 = C_4^0 0.6^2 \times 0.4^2 \times 0.6 + C_4^2 0.6^2 \times 0.4 \times 0.6 + C_4^3 0.6^3 = 0.68256$, 10 分

对甲而言, 显然“5 局 3 胜制”更有利.

由此可得出: 比赛局数越多, 对水平高的选手越有利. 12 分

- 20.【解析】(Ⅰ)易知平面 $ABE \parallel$ 平面 $CDGF$, 且 A, E, F, G 四点共面于平面 $AEFG$, 故 $AE \parallel GF$, 同理 $AG \parallel EF$, 故 $AEFG$ 为平行四边形, 故 $AE = FG$, 过点 G 作 CF 的垂线, 垂足为 N , 则 $\triangle ABE \cong \triangle GNF$, $FN = BE = 1$, $FC = 4 + 1 = 5$, $AC = 2\sqrt{2}$, $AF = \sqrt{AC^2 + FC^2} = \sqrt{33}$,
- $$\tan \theta = \frac{FC}{AC} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$
- (Ⅱ)以 A 为原点, AB, AD 为 x, y 轴建立直角坐标系, $MC = 2, B(2, 0, 0), M(2, 2, 2)$, $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0), \overrightarrow{AM} = (2, 2, 2)$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$
- 设平面 ABM 的法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,
- $$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AM} = 2x + 2y + 2z = 0, \end{cases} \quad \text{设 } y = 1, z = -1, \text{ 取 } \mathbf{m} = (0, 1, -1), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$
- 又 $E(2, 0, 1), F(2, 2, 5), \overrightarrow{AE} = (2, 0, 1), \overrightarrow{AF} = (2, 2, 5)$, 设平面 $AEFG$ 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,
- $$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 2x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 2x + 2y + 5z = 0, \end{cases}$$
- 设 $x = 1$, 则 $z = -2, y = 4$, 取 $\mathbf{n} = (1, -2, 4)$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$
- 则 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{-2 + (-4)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{21}} = -\frac{\sqrt{42}}{7}$,
- 设平面 ABM 与平面 $AEFG$ 所成锐二面角为 α ,
- 则 $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{42}}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ 为所求. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$
- 21.【解析】(Ⅰ)由题意得 $A(-a, 0), B(a, 0), Q(0, \sqrt{3})$, 则 $\overrightarrow{AQ} = (a, \sqrt{3}), \overrightarrow{QB} = (a, -\sqrt{3})$.
由 $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{QB} = 1$, 得 $a^2 - 3 = 1$, 即 $a = 2$,
所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$
- (Ⅱ)①设 $P(2\cos \theta, \sqrt{3}\sin \theta)$, 直线 $MN: y = -\frac{3}{2}x$ 即 $3x + 2y = 0$,
- 点 P 到直线 MN 的距离 $d = \frac{|6\cos \theta + 2\sqrt{3}\sin \theta|}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{3} \left| \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right|}{\sqrt{13}} \leq \frac{4\sqrt{39}}{13}$, $|MN| = \sqrt{13}$,
- 则 $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d \leq 2\sqrt{3}$, 即 $(S_{\triangle PMN})_{\max} = 2\sqrt{3}$. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$
- ②设 $P(x_0, y_0)$, $|MN| = \sqrt{13}$, 点 P 到直线 MN 的距离 $d_1 = \frac{|3x_0 + 2y_0|}{\sqrt{13}}$,
- $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} |MN| \cdot d_1 = \frac{1}{2} |3x_0 + 2y_0|$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$
- 直线 $MP: y = \frac{y_0 - \frac{3}{2}}{x_0 + 1}(x + 1) + \frac{3}{2}$, 令 $x = 3$, 可得 $C\left(3, \frac{4y_0 - 6}{x_0 + 1} + \frac{3}{2}\right)$,
- 直线 $PN: y = \frac{y_0 + \frac{3}{2}}{x_0 - 1}(x - 1) - \frac{3}{2}$, 令 $x = 3$, 可得 $D\left(3, \frac{2y_0 + 3}{x_0 - 1} - \frac{3}{2}\right)$,
- $|CD| = \left| \frac{(3x_0 + 2y_0)(x_0 - 3)}{x_0^2 - 1} \right|$, P 到直线 CD 的距离为 $d_2 = |3 - x_0|$,
- $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} |CD| \cdot d_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{3x_0 + 2y_0}{x_0^2 - 1} \right| \times (3 - x_0)^2$, $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$\because \triangle MPN \text{ 与 } \triangle PCD \text{ 面积相等}, \therefore \frac{1}{2} |3x_0 + 2y_0| = \frac{1}{2} \left| \frac{3x_0 + 2y_0}{x_0^2 - 1} \right| \times (3 - x_0)^2,$$

$$\text{故 } 3x_0 + 2y_0 = 0 \text{ (舍) 或 } |x_0^2 - 1| = (3 - x_0)^2,$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{5}{3}, \text{ 代入椭圆方程得 } y_0 = \pm \frac{\sqrt{33}}{6},$$

$$\text{故点 } P\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{33}}{6}\right) \text{ 或 } \left(\frac{5}{3}, -\frac{\sqrt{33}}{6}\right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【解析】(I) 显然 $g(x)$ 为偶函数, 故只需 $g(x) \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立即可. 由 $g(\pi) \geq 0$ 知 $a > 0$,
 $g'(x) = -\sin x + 2ax, g''(x) = -\cos x + 2a. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

(1) 若 $2a \geq 1$, 则 $g''(x) \geq 0, g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore g'(x) > g'(0) = 0, g(x)$ 单调递增,
 $\therefore g(x) \geq g(0) = 0$, 故 $a \geq \frac{1}{2}$ 满足条件. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 若 $0 < a < \frac{1}{2}$, 则存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $g''(x_0) = 0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $g''(x_0) < 0, g'(x)$ 单调递减,
 $g'(x) < g'(0) = 0, g(x)$ 单调递减, $g(x) < g(0) = 0$, 不成立, 故 $0 < a < \frac{1}{2}$ 不满足条件.

所以所求 a 的范围为 $a \geq \frac{1}{2}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(II) f'(x) = \frac{1}{1+x} - 2\sin x + \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} - 2\cos x - \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{5}{2}}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(1) 当 $x \in (-1, 0]$ 时, $f''(x) < 0, f'(x)$ 单调递减, $f'(x) > f'(0) > 0, f(x)$ 单调递增,
 又 $f(0) = 1 > 0, f(-\frac{3}{4}) = -2\ln 2 + 2\cos \frac{3}{4} - 2 < 0, \therefore f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内恰有一个零点; $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{3}]$ 时, 可以证明 $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$, 由 (I) 知 $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$,
 $\therefore f(x) > x + 2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} > x + 1 - \frac{3}{2}x^2 > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3}]$ 内无零点; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 当 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f''(x) < 0, f'(x)$ 单调递减, $f'(x) < f'(\frac{\pi}{3}) < 0, f(x)$ 单调递减,
 $f(x) \geq f(\frac{\pi}{2}) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 无零点; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

(4) 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ 时, $f'(x) < \frac{1}{1+x} - 1 + \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} < 0, f(x)$ 单调递减,
 又 $f(\frac{\pi}{2}) > 0, f(\frac{5\pi}{6}) = \ln(1 + \frac{5\pi}{6}) - \sqrt{3} - (1 + \frac{5\pi}{6})^{-\frac{1}{2}} < 2\ln 2 - \sqrt{3} < 0$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ 内恰有一零点; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(5) 当 $x \in (\frac{5\pi}{6}, \pi]$ 时, $f''(x) > 0, f'(x)$ 单调递增, 又 $f'(\pi) > 0, f'(\frac{5\pi}{6}) < 0$,
 $\therefore$ 存在唯一 $x_0 \in (\frac{5\pi}{6}, \pi), f'(x_0) = 0$, 当 $x \in (\frac{5\pi}{6}, x_0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 递减, 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时,
 $f'(x) > 0, f(x)$ 递增, $f(x) \leq \max\{f(\frac{5\pi}{6}), f(\pi)\} < 0$,
 $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{5\pi}{6}, \pi]$ 内无零点;

综上, $f(x)$ 恰有两个零点. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$