

数学

命题人:周艳军 邓云 刘伟才 审题人:周艳军

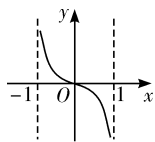
本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共8页。时量120分钟。满分150分。

得分:___

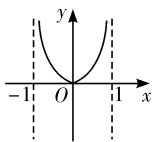
第Ⅰ卷

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

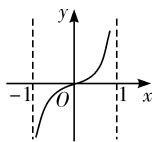
1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-1} \leq 0\right\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{0\}$ B. $\{-1, 0\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$
2. 已知 i 是虚数单位, 则化简 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020}$ 的结果为
A. i B. $-i$ C. -1 D. 1
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, m)$, 则“ $m < \frac{1}{2}$ ”是“ $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为钝角”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 设函数 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$, 则函数 $f(x)$ 的图象可能为



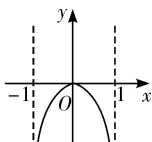
A



B



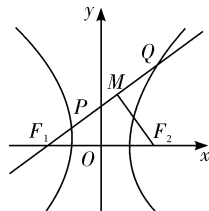
C



D

5. 直线 l 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 且与抛物线交于 A, B 两点, 若线段 AF, BF 的长分别为 m, n , 则 $4m + n$ 的最小值是
A. 10 B. 9 C. 8 D. 7
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 0, \\ a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
7. 在《爸爸去哪儿》第二季第四期中, 假如村长给 6 位“萌娃”布置一项到 A, B, C 三个位置搜寻空投食物的任务, 每两位“萌娃”搜寻一个位置. 考虑到位置远近及年龄大小, Grace 不去较远的 A 位置, 多多不去较近的 C 位置, 则不同的搜寻安排方案有
A. 20 种 B. 40 种 C. 42 种 D. 48 种

8. 如图, F_1, F_2 是双曲线 $l: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线与双曲线左、右两支分别交于点 P, Q . 若 $\overrightarrow{F_1Q} = 5\overrightarrow{F_1P}$, M 为 PQ 的中点, 且 $\overrightarrow{F_1Q} \perp \overrightarrow{F_2M}$, 则双曲线的离心率为



A. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

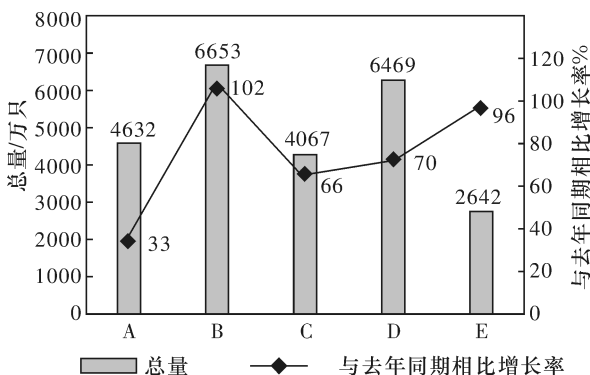
B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $\sqrt{2}$

D. 2

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. 在“新冠肺炎”疫情期间, 各口罩企业都加大了生产力度, 如图是 2020 年第一季度 A、B、C、D、E 五个企业的生产量情况, 下列叙述正确的是



- A. 2020 年第一季度生产量增速由高到低排位第 5 的是 A 企业
 B. 2020 年第一季度生产总量和增速由高到低排位均居同一位次的企业只有一个
 C. 2019 年同期 C 企业的生产总量不超过 2000 万只
 D. 与 2019 年同期相比, 各企业 2020 年第一季度的生产总量都实现了增长
10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_{10} < 0, a_{11} > 0$, 且 $a_{11} > |a_{10}|$, 则使 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < 0$ 成立的自然数 n 可能为
- A. 17 B. 18 C. 19 D. 20

11. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$, 满足 $f(x - \frac{2\pi}{3}) + f(-x) = 0, f(\frac{\pi}{3} + x) = f(-x)$, 且 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有 7 个零点, 下述结论正确的是

A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$

B. $\omega = 5$

C. $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有 4 个极大值点

D. $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{42})$ 上单调递增

12. 已知实数 a, b, c 满足 $\frac{a-2e^a}{b} = \frac{1-c}{d-1} = 1$, 其中 e 是自然对数的底数, 那么

$(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的值可能是

A. 8

B. 6

C. 10

D. 7

选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第 II 卷

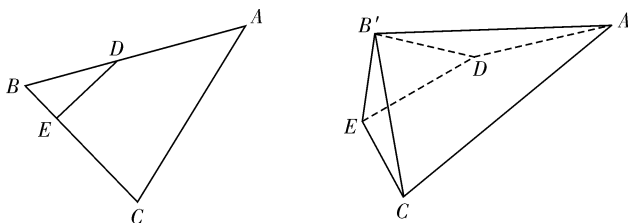
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(x-1)^{10} - (x+1)^{10}$ 的展开式中 x 最高次项的系数为 _____. (用数字)

14. 设 α 满足 $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{2\sin(\pi+\alpha) + \sin 2\alpha}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} =$ _____.

15. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 1, E, F 分别是线段 BC, CD 上的动点, 则 $\vec{EF} \cdot \vec{EA} + 2\vec{AF}^2$ 的最小值是 _____.

16. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是边长为 1 的等边三角形, D 是 AB 边上异于端点的一个动点, $DE \perp BC$ 于点 E , 将 $\triangle BDE$ 沿 DE 翻折至 $\triangle B'DE$ 的位置, 其中 $B'-DE-A$ 为直二面角, 则四棱锥 $B'-ADEC$ 体积的最大值为 _____.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边. 已知 $A+B = \frac{\pi}{3}$, $c=3$, 若 _____.

在横线上选择下面一个序号作为条件, 求 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 及 c 边上的高 h .

① $a-b = \sqrt{6}$; ② $a+b = \sqrt{10}$; ③ $\sin A \sin B = \frac{1}{12}$.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分。

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{100} = \frac{1}{201}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$.

(1) 证明 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(2) 设 $b_n = (-1)^n \left(\frac{1}{a_n} + 2^n\right)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 T_{2n} .

19. (本小题满分 12 分)

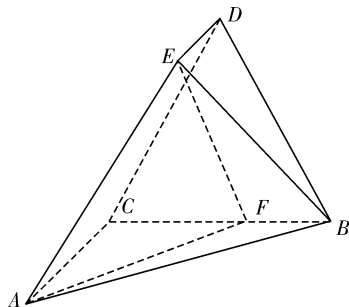
如图,在五面体 $ABCDE$ 中,平面 $BCD \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $ED \parallel AC$, 且 $AC = BC = 2ED = 2$, $DC = DB = \sqrt{3}$.

(1) 求证: 平面 $ABE \perp$ 平面 ABC ;

(2) 线段 BC 上是否存在一点 F , 使得二

面角 $F-AE-B$ 的余弦值等于 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$,

若存在, 求 $\frac{BF}{BC}$ 的值; 若不存在, 说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

某个地区计划在某水库建一座至多安装 3 台发电机的水电站,过去 50 年的水文资料显示,水的年入流量 X (年入流量:一年内上游来水与库区降水之和,单位:十亿立方米)都在 4 以上,其中,不足 8 的年份有 10 年,不低于 8 且不超过 12 的年份有 35 年,超过 12 的年份有 5 年,将年入流量在以上三段的频率作为相应段的概率,并假设各年的年入流量相互独立.

- (1)求未来 4 年中,至多有 1 年的年入流量超过 12 的概率.
- (2)水电站希望安装的发电机尽可能运行,但每年发电机最多可运行台数受年入流量 X 限制,并有如下关系:

年入流量 X	$4 < X < 8$	$8 \leq X \leq 12$	$X > 12$
发电机最多可运行台数	1	2	3

若某台发电机运行,则该台年利润为 5000 万元;若某台发电机未运行,则该台年亏损 800 万元,欲使水电站年总利润的均值达到最大,应安装发电机多少台?

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A 和 B , $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_1, -y_1)$ 是双曲线上两个不同的动点.

(1) 求直线 AM 与 BN 交点的轨迹 C 的方程;

(2) 已知点 $F(1, 0)$, 过点 A 且斜率为 $k (k > 0)$ 的直线交曲线 C 于另一点 P , 设直线 $l: x = 2$, 延长 AP 交直线 l 于点 Q , 线段 BQ 的中点为 E , 求证: 点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 PF 上.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{2}x^2 - (a+1)x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$) 是函数 $g(x) = f(x) + x$ 的两个极值点, 证明:

$$g(x_1) - g(x_2) < \frac{a}{2} - \ln a \text{ 恒成立.}$$

数学参考答案

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. B 【解析】 $\because A = \{-1, 0, 1\}, B = \{x | -1 \leq x < 1\}, \therefore A \cap B = \{-1, 0\}$.

2. D 【解析】 $\because \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i, \therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020} = i^{2020} = i^{4 \times 505} = 1$.

3. B 【解析】由题意得, $a \cdot b = -1 + 2m$.

$$\text{若 } m < \frac{1}{2}$$

故充分性不成立.

若 $\langle a, b \rangle$ 为钝角, 则 $a \cdot b < 0$, 且 $a \neq \lambda b (\lambda \in \mathbf{R})$, 解得 $m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq -2$.

故“ $m < \frac{1}{2}$ ”是“ $\langle a, b \rangle$ 为钝角”的必要不充分条件.

4. B 【解析】函数 $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为 $(-1, 1)$, 由 $f(-x) = -x \ln \frac{1-x}{1+x} = x \ln \frac{1+x}{1-x} = f(x)$, 得 $f(x)$ 为

偶函数, 排除 A, C; 又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 > 0$, 排除 D.

5. B 【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$, 准线方程 l 为 $x = -1$, 如图所示, 作 $AM \perp l$ 于 M , $BN \perp l$ 于 N , 过点 B 作 $BD \perp AM$ 于 D , 由抛物线的定义可得 $AM = AF = m, BN = BF = n$,

$$AD = m - n, EF = 2 - n, \therefore \frac{2-n}{m-n} = \frac{n}{m+n}, \text{化简得: } \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1,$$

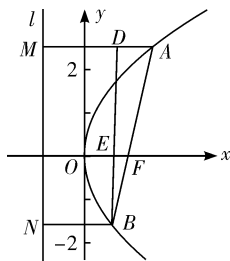
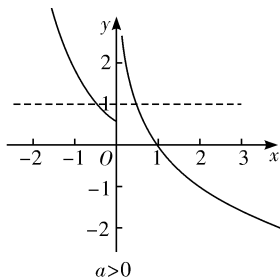
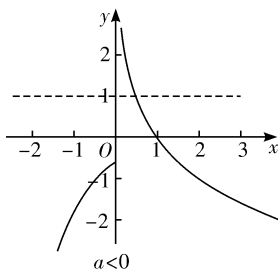
$$\therefore 4m + n = (4m + n) \cdot 1 = (4m + n) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{4m}{n} + \frac{n}{m} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{4m}{n} \cdot \frac{n}{m}} + 5 = 9,$$

当且仅当 $n = 2m$ 时等号成立. 所以 $4m + n$ 的最小值为 9.

6. B 【解析】令 $f(x) = t$, 则方程 $f[f(x)] = 0$ 等价于 $f(t) = 0$,

由选项知 $a \neq 0$, 则 $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \neq 0$, 所以由 $f(t) = \log_{\frac{1}{2}} t = 0$, 得 $t = 1$,

则关于 x 的方程 $f[f(x)] = 0$ 有且只有一个实数根等价于关于 x 的方程 $f(x) = 1$ 有且只有一个实数根, 作出 $f(x)$ 的图象如图:



当 $a < 0$ 时, 由图象可知直线 $y=1$ 与 $y=f(x)$ 的图象只有一个交点, 恒满足条件;

当 $a > 0$ 时, 要使直线 $y=1$ 与 $y=f(x)$ 的图象只有一个交点,

则只需要当 $x \leq 0$ 时, 直线 $y=1$ 与 $f(x) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象没有交点,

所以 $f(0) > 1$, 即 $a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 > 1$, 解得 $a > 1$,

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, 故选 B.

7. C 【解析】分两类, 第一类, 多多去较远的 A 位置, 从不包含 Grace 的 4 位“萌娃”选一位去 A, 剩下的 4 位“萌娃”平均分配到 B, C, 故有 $C_4^1 \cdot C_4^2 = 24$ 种,

第二类, 多多去 B 位置, 则先从不包含 Grace 的 4 位“萌娃”选 2 位去 A, 再从剩下的 3 位中选一位去 B, 剩下的两位到 C, 故有 $C_4^2 \cdot C_3^1 = 18$ 种,

根据分类计数原理, 不同的搜寻安排方案共有

8. A 【解析】连接 F_2P, F_2Q , 设 $|F_1P| = t$, 则由题意可得 $|PM| = |MQ| = 2t$,

因为 P, Q 为双曲线上的点, 所以 $|F_2P| = t + 2a, |F_2Q| = 5t - 2a$,

因为 M 为 PQ 的中点, 且 $\overrightarrow{F_1Q} \perp \overrightarrow{F_2M}$,

所以 $|F_2P| = |F_2Q|$, 所以 $t + 2a = 5t - 2a$, 所以 $t = a$,

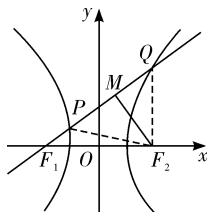
所以 $|F_1P| = a, |PM| = |MQ| = 2a, |F_2P| = |F_2Q| = 3a$,

在直角三角形 PMF_2 中, $\cos \angle MPF_2 = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$,

所以在三角形 PF_1F_2 中,

由余弦定理可得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{a^2 + 9a^2 - 4c^2}{2 \times a \times 3a} = -\frac{2}{3}$,

所以可得 $2c^2 = 7a^2$, 即 $e = \sqrt{\frac{14}{5}}$.



二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 3 分.

9. AD 【解析】由折线图可知 A, D 正确; $4067 \div (1 + 66\%) \approx 2450 > 2000$, 故 C 错误; 2020 年第一季度生产总量和增速由高到低排位均居同一位次的有 B 企业均第一, C 企业均第四, 共有 2 个, 故 B 错误.

10. ABC 【解析】 $\because \{a_n\}$ 为等差数列, $a_{10} < 0, a_{11} > 0, \therefore d > 0$, 又 $\because a_{11} > |a_{10}|, \therefore a_{11} > -a_{10}$, 即 $a_{10} + a_{11} > 0$, 由 $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \times 20 = 10(a_{10} + a_{11}) > 0, S_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \times 19 = 19a_{10} < 0$, 故使 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n < 0$ 成立的最小的自然数为 19, 故选 ABC.

11. CD 【解析】由题意 $x = \frac{\pi}{6}$ 函数为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 为函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 所以 $\omega \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$, 且 $\omega \times (-\frac{\pi}{3}) + \varphi = m\pi, m \in \mathbf{Z}$, 所以 $\omega = 2(n - m) +$

$1 = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}$, 因为 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上有且仅有 7 个零点, 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\omega = 7$, 所以 $7 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} +$

$k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 所以选项 AB 错误. 所以 $f(x) = \sin(7x + \frac{\pi}{3})$, 令 $7x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

$k \in \mathbf{Z}$, 得 $x = \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbf{Z}$, 当 $0 < \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} < \pi$, 解得 $-\frac{1}{12} < k < \frac{41}{12}$, 因为 $k \in \mathbf{Z}$, 所以 $k = 0, 1, 2, 3$. 故 $f(x)$ 在

$(0, \pi)$ 上有且仅有 4 个极大值点, 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 7x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 得, $-\frac{5\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7} \leq x \leq \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}$, 即 $f(x)$

在 $\left[-\frac{5\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}, \frac{\pi}{42} + \frac{2k\pi}{7}\right]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{42}\right)$ 上单调递增, 选项 CD 正确, 故选 CD.

12. AC 【解析】由 $\frac{a-2e^a}{b} = 1 \Rightarrow b = a - 2e^a \Rightarrow f(x) = x - 2e^x$; 又由 $\frac{1-c}{d-1} = 1 \Rightarrow d = 2 - c \Rightarrow g(x) = 2 - x$; 由 $f'(x) =$

$1 - 2e^x = -1$, 得 $x = 0$, 所以切点坐标为 $(0, -2)$, 所以 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最小值为 $\left(\frac{|0-2-2|}{\sqrt{1+1}}\right)^2 = 8$, 故

选 AC.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. -20 14. -3

15. $\frac{21}{8}$ 【解析】设 $DF = x (0 < x < 1)$, AF, BC 中点分别为 M, N , 则 $\vec{EF} \cdot \vec{EA} + 2\vec{AF}^2 = |\vec{EM}|^2 - |\vec{FM}|^2 +$

$$2(x^2 + 1) \geq MN^2 - \frac{x^2 + 1}{4} + 2(x^2 + 1) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{7x^2 + 7}{4} = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{8} \geq \frac{21}{8}.$$

当且仅当 $x = \frac{1}{4}$ 时等号成立. 所以 $\vec{EF} \cdot \vec{EA} + 2\vec{AF}^2$ 的最小值是 $\frac{21}{8}$.

另解: 本题还可建立平面直角坐标系, 用坐标法求解, 过程略.

16. $\frac{\sqrt{2}}{36}$ 【解析】设 $B'E = x$, 则 $DE = \sqrt{3}x$, 容易验证 $B'E \perp$ 平面 $ADEC$, 四边形 $ADEC$ 的面积 $S = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DBE}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}x^2, \text{ 故 } V_{B'-ADEC} = \frac{1}{3}S \cdot B'E = \frac{\sqrt{3}}{12}(1 - 2x^2)x, \text{ 利用导数可得当 } x = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ 时, 体积最大值为 } \frac{\sqrt{2}}{36}.$$

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】由 $A + B = \frac{\pi}{3}$, $c = 3$, 得 $C = \frac{2\pi}{3}$, 由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 + ab$, 2 分

对①, $a - b = \sqrt{6}$, 由 $9 = a^2 + b^2 + ab = (a - b)^2 + 3ab$, 得 $ab = 1$, 6 分

故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 8 分

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}ch$, 得 $h = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 10 分

对②, $a + b = \sqrt{10}$, 由 $9 = a^2 + b^2 + ab = (a + b)^2 - ab$, 得 $ab = 1$, 6 分, 下同.

对③, $\sin A \sin B = \frac{1}{12}$, 由 $\sin A \sin B = \frac{a \sin C}{c} \cdot \frac{b \sin C}{c} = \frac{1}{12}$, 得 $ab = 1$, 6 分, 下同.

18. 【解析】(1) 由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$,

故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 2 的等差数列, 3 分

故 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + 2(n-1)$, 由 $a_{100} = \frac{1}{201}$, 得 $a_1 = \frac{1}{3}$, 5 分

故 $\frac{1}{a_n} = 2n + 1$, 于是 $a_n = \frac{1}{2n + 1}$ 6 分

(2) 依题意, $b_n = (-1)^n(2n + 1 + 2^n) = (-1)^n(2n + 1) + (-2)^n$, 8 分

$$\text{故 } T_{2n} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n} = [-3 + (-2)] + [5 + (-2)^2] + \cdots + [4n + 1 + (-2)^{2n}]$$

$$\begin{aligned}
 &= [-3+5-7+\cdots+(4n+1)]+ [(-2)+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{2n}] \\
 &= \{(-3+5)+(-7+9)+\cdots+[-4n+1+(4n+1)]\}+ [(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^{2n}] \\
 &= 2n+\frac{-2[1-(-2)^{2n}]}{1-(-2)}=2n-\frac{2}{3}+\frac{2^{2n+1}}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

19.【解析】解法一：(1)如图，设 BC 中点为 O ，过 O 作 $Ox \parallel AC$ ，

则有 $DO \perp BC$ ，

又平面 $BCD \perp$ 平面 ABC ，所以 $DO \perp$ 平面 ABC ，所以 $DO \perp Ox$ ，

又 $Ox \perp BC$ ，故 Ox, OB, OD 三条直线两两垂直，

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

依题意可得 $A(2, -1, 0), E(1, 0, \sqrt{2}), B(0, 1, 0), \overrightarrow{AE} = (-1, 1, \sqrt{2}),$
 $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$ ，设平面 ABE 的法向量 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ ，

$$\text{则有} \begin{cases} -x+y+\sqrt{2}z=0, \\ -2x+2y=0, \end{cases} \text{取} \mathbf{n}_1 = (1, 1, 0), \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

取平面 ABC 的法向量 $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$ ，

因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ ，所以平面 $ABE \perp$ 平面 ABC . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 设 $F(0, m, 0) (-1 \leq m < 1)$ ，则 $\overrightarrow{AF} = (-2, m+1, 0), \overrightarrow{AE} = (-1, 1, \sqrt{2})$ ，

设平面 AFE 的法向量 $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，

$$\text{则有} \begin{cases} -x+y+\sqrt{2}z=0, \\ -2x+(m+1)y=0, \end{cases} \text{取} \mathbf{m} = \left(m+1, 2, \frac{m-1}{\sqrt{2}}\right). \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{m} \rangle = \frac{m+1+2}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3m^2}{2} + m + \frac{11}{2}}}, \text{易知二面角 } F-AE-B \text{ 的大小与向量 } \mathbf{n}_1, \mathbf{m} \text{ 的夹角大小一致,}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{m} \rangle = \frac{m+1+2}{\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{3m^2}{2} + m + \frac{11}{2}}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}, \text{化简得 } 3m^2 - 7m + 2 = 0, \text{解得 } m = \frac{1}{3} \text{ 或 } m = 2 (\text{舍}),$$

$$\text{所以 } m = \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{所以线段 } BC \text{ 上存在一点 } F, \text{使得二面角 } F-AE-B \text{ 的余弦值等于 } \frac{5\sqrt{3}}{9}, \text{此时 } \frac{BF}{BC} = \frac{1-\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

解法二：(1) 设 BC, AB 的中点分别为 M, N ，连结 DM, MN, NE ，

因为 M, N 分别为 BC, AB 的中点，所以 $MN \parallel AC$ ，且 $MN = \frac{1}{2} AC$ ，

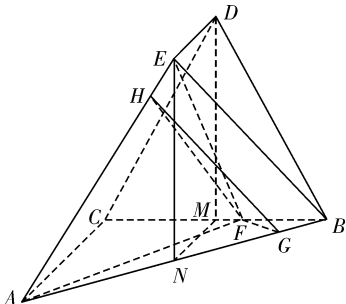
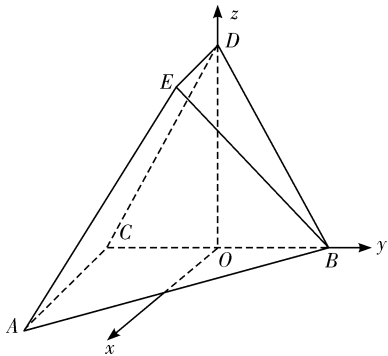
又因为 $ED \parallel AC$ ，且 $ED = \frac{1}{2} AC$ ，所以 $MN \parallel ED$ 且 $MN = ED$ ，

所以四边形 $EDMN$ 为平行四边形，所以 $EN \parallel DM$ ，

因为 M 是 BC 中点，且 $DC = DB$ ，所以 $DM \perp BC$ ，

又因为平面 $BCD \perp$ 平面 ABC ，平面 $BCD \cap$ 平面 $ABC = BC, DM \subset$ 平面 BCD ，所以 $DM \perp$ 平面 ABC ，

所以 $EN \perp$ 平面 ABC ，又因为 $EN \subset$ 平面 ABE ，所以平面 $ABE \perp$ 平面 ABC . $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$



(2)过 F 作 $FG \perp AB$, 垂足为 G , 过 G 作 $GH \perp AE$, 垂足为 H , 连结 FH ,
 故 $\angle FHG$ 即二面角 $F-AE-B$ 的平面角, 6 分
 因为 $DC=DB=\sqrt{3}$, 故 $DM=\sqrt{2}$, 所以 $EN=\sqrt{2}$,
 又 $AN=BN=\sqrt{2}$, 故 $BE=AE=2$, 从而 $\triangle AEB$ 为等腰直角三角形,
 设 $BF=2x(0 < x \leq 1)$, 则 $FG=BG=\sqrt{2}x$, 故 $AG=2\sqrt{2}-\sqrt{2}x$,
 所以 $GH=2-x$ 8 分
 在 $\text{Rt}\triangle FGH$ 中可求得 $FH=\sqrt{3x^2-4x+4}$, 所以 $\cos\angle FHG=\frac{2-x}{\sqrt{3x^2-4x+4}}$,
 令 $\cos\angle FHG=\frac{5\sqrt{3}}{9}$, 化简得 $6x^2+x-1=0$, 解得 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$ (舍),
 所以 $BF=\frac{2}{3}$, 11 分
 所以线段 BC 上存在一点 F , 使得二面角 $F-AE-B$ 的余弦值等于 $\frac{5\sqrt{3}}{9}$,
 此时 $\frac{BF}{BC}=\frac{1}{3}$ 12 分

20. 【解析】(1)依题意, $P_1=P(4 < X < 8)=\frac{10}{50}=0.2$, $P_2=P(8 \leq X \leq 12)=\frac{35}{50}=0.7$, $P_3=P(X > 12)=\frac{5}{50}=0.1$.

易知年入流量超过 12 的年数服从二项分布 $B(4, 0.1)$, 所以在未来 4 年中至多有 1 年的年入流量超过 12 的概率为 $P=C_4^0(1-0.1)^4+C_4^1(1-0.1)^3 \times 0.1=0.6561+4 \times 0.729 \times 0.1=0.9477$ 4 分
 (2)记水电站年总利润为 ξ (单位: 万元).

①安装 1 台发电机的情形.
 由于水库年入流量总大于 4, 故一台发电机运行的概率为 1, 对应的年利润 $\xi=5000$,
 $E(\xi)=5000 \times 1=5000$ 6 分

②安装 2 台发电机的情形.
 依题意, 当 $4 < X < 8$ 时, 一台发电机运行, 此时 $\xi=5000-800=4200$, 因此 $P(\xi=4200)=P(4 < X < 8)=P_1=0.2$;
 当 $X \geq 8$ 时, 两台发电机运行, 此时 $\xi=5000 \times 2=10000$,
 因此 $P(\xi=10000)=P(X \geq 8)=P_2+P_3=0.8$. 由此得 ξ 的分布列如下:

ξ	4200	10000
P	0.2	0.8

所以, $E(\xi)=4200 \times 0.2+10000 \times 0.8=8840$ 8 分

③安装 3 台发电机的情形.
 依题意, 当 $4 < X < 8$ 时, 一台发电机运行, 此时 $\xi=5000-1600=3400$,
 因此 $P(\xi=3400)=P(4 < X < 8)=P_1=0.2$;
 当 $8 \leq X \leq 12$ 时, 两台发电机运行,
 此时 $\xi=5000 \times 2-800=9200$, 因此 $P(\xi=9200)=P(8 \leq X \leq 12)=P_2=0.7$;
 当 $X > 12$ 时, 三台发电机运行, 此时 $\xi=5000 \times 3=15000$,
 因此 $P(\xi=15000)=P(X > 12)=P_3=0.1$.

由此得 ξ 的分布列如下:

ξ	3400	9200	15000
P	0.2	0.7	0.1

所以, $E(\xi) = 3400 \times 0.2 + 9200 \times 0.7 + 15000 \times 0.1 = 8620$ 11 分

综上, 欲使水电站年总利润的均值达到最大, 应安装发电机 2 台. 12 分

21. 【解析】(1) 设直线 AM 与 BN 的交点为 $P(x, y)$,

$\because A, B$ 是双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点, $\therefore A(-2, 0), B(2, 0)$,

$AM: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), BN: y = \frac{-y_1}{x_1 - 2}(x - 2)$, 2 分

两式相乘得 $y^2 = \frac{-y_1^2}{x_1^2 - 4}(x^2 - 4)$, 而 $M(x_1, y_1)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 上,

所以 $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{3} = 1 (x_1 \neq \pm 2)$, 即 $\frac{-y_1^2}{x_1^2 - 4} = -\frac{3}{4}$, 所以 $y^2 = -\frac{3}{4}(x^2 - 4)$, 化简得: $4y^2 + 3x^2 = 12$, 即 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

..... 4 分

又当 $y = 0$ 时, 不合题意, 去掉左右顶点.

$\therefore$ 直线 AM 与 BN 的交点的轨迹 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$; 5 分

(2) 直线 AP 的方程为 $y = k(x + 2)$, 将 $x = 2$ 代入 $y = k(x + 2)$ 得 $y = 4k$,

所以 $Q(2, 4k)$. 因为 E 为线段 BQ 的中点, 所以 $E(2, 2k)$, 因为点 F 的坐标为 $(1, 0)$, 所以直线 EF 的斜率 $k_{EF} = 2k$, 6 分

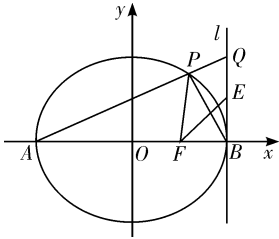
联立 $\begin{cases} y = k(x + 2), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 消去 y 得: $(3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$,

由 $x_A x_P = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}$, 且 $x_A = -2$, $\therefore x_P = \frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2}$, 所以点 P 的坐标为 $(\frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2}, \frac{12k}{3 + 4k^2})$ 8 分

所以直线 PF 的斜率 $k_{PF} = \frac{\frac{12k}{3 + 4k^2}}{\frac{6 - 8k^2}{3 + 4k^2} - 1} = \frac{4k}{1 - 4k^2} = \frac{2 \times 2k}{1 - (2k)^2}$, 10 分

而直线 EF 的斜率为 $2k$, 若设 $\angle EFB = \theta$, 则有 $\tan \angle PFB = \tan 2\theta$,

即 $\angle PFB = 2\angle EFB$, 所以点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 PF 上. 12 分



22. 【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + ax - (a + 1) = \frac{ax^2 - (a + 1)x + 1}{x} = \frac{(x - 1)(ax - 1)}{x}$.

..... 1 分

① 当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减; 2 分

② 当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \frac{1}{a})$ 上单调递减; 3 分

③ 当 $a = 1$ 时, 则 $f'(x) \geq 0$, 所以在 $(0, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递增; 4 分

④当 $a>1$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<\frac{1}{a}$ 或 $x>1$,令 $f'(x)<0$,得 $\frac{1}{a}<x<1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$, $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(\frac{1}{a},1)$ 上单调递减;

综上,当 $a\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增,在 $(1,+\infty)$ 上单调递减;

当 $0<a<1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$, $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上单调递增,在 $(1,\frac{1}{a})$ 上单调递减;

当 $a=1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $a>1$ 时, $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$, $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(\frac{1}{a},1)$ 上单调递减. 5 分

(2) $g(x)=f(x)+x=\ln x+\frac{a}{2}x^2-ax$,则 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $g'(x)=\frac{1}{x}+ax-a=\frac{ax^2-ax+1}{x}$,若 $g(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2 ($0<x_1<x_2$),

则方程 $ax^2-ax+1=0$ 的判别式 $\Delta=a^2-4a>0$,且 $x_1+x_2=1,x_1x_2=\frac{1}{a}>0$,所以 $a>4$, 7 分

因为 $0<x_1<x_2$,所以 $x_1^2<x_1x_2=\frac{1}{a}$,得 $0<x_1<\sqrt{\frac{1}{a}}$, 8 分

所以 $g(x_1)-g(x_2)=\ln x_1+\frac{a}{2}x_1^2-ax_1-\ln x_2-\frac{a}{2}x_2^2+ax_2=\ln x_1+\ln(ax_1)+\frac{a}{2}-ax_1$,

设 $h(t)=\ln t+\ln(at)+\frac{a}{2}-at$,其中 $t=x_1\in(0,\frac{1}{\sqrt{a}})$,

令 $h'(t)=\frac{2}{t}-a=0$ 得 $t=\frac{2}{a}$, 9 分

又 $\frac{2}{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2-\sqrt{a}}{a}<0$,所以 $h(t)$ 在区间 $(0,\frac{2}{a})$ 内单调递增,在区间 $(\frac{2}{a},\frac{1}{\sqrt{a}})$ 内单调递减,即 $h(t)$ 的最大值为 $h(\frac{2}{a})=2\ln 2-\ln a+\frac{a}{2}-2$, 11 分

而 $2\ln 2-2<0$, $\therefore h(\frac{2}{a})=2\ln 2-\ln a+\frac{a}{2}-2<\frac{a}{2}-\ln a$,

从而 $g(x_1)-g(x_2)<\frac{a}{2}-\ln a$ 恒成立. 12 分