

数 学

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页. 时量 120 分钟. 满分 150 分.

得分: _____

第 I 卷

一、单项选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 满足 $\frac{z+i}{z} = i$ (i 是虚数单位), 则 $\bar{z} =$

A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

C. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2. 设集合 $A = \{x | -1 < \log_3 x < 1\}$, $B = \{y | y = 2^x, x \in [0, 2]\}$, 则 $A \cap B =$

A. $[0, 2)$

B. $(1, 3)$

C. $[1, 3)$

D. $(1, 4)$

3. 有一种细菌和一种病毒, 每个细菌在每秒中杀死一个病毒的同时将自身分裂为 3 个, 现在有一个这样的细菌和 110 个这样的病毒, 问细菌将病毒全部杀死, 至少需要

A. 4 秒钟

B. 5 秒钟

C. 6 秒钟

D. 7 秒钟

4. 下列选项中, p 是 q 的必要不充分条件的是

A. $p: a+c > b+d, q: a > b$ 且 $c > d$

B. $p: a > 1, b > 1, q: f(x) = a^x - b$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象不过第二象限

C. $p: x \geq 2$ 且 $y \geq 2, q: x^2 + y^2 \geq 4$

D. $p: a > 1, q: f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数

5. 电视机的使用寿命与显像管开关的次数有关, 某品牌的电视机的显像管开关了 10000 次还能继续使用的概率是 0.80, 开关了 15000 次后还能继续使用的概率是 0.60, 则已经开关了 10000 次的电视机显像管还能继续使用到 15000 次的概率是

A. 0.20

B. 0.48

C. 0.60

D. 0.75

6. 已知 A, B, C 三点不共线, O 为平面 ABC 外的任一点, 则“点 M 与点 A, B, C 共面”的充分条件的是
- A. $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
- B. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
- C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$
- D. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$
7. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, A, B 是圆 $(x-c)^2 + y^2 = 4c^2$ 与 C 位于 x 轴上方的两个交点 (A 在左支, B 在右支), 且 $F_1A \parallel F_2B$, 则双曲线 C 的离心率为
- A. $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$
- B. $\frac{4+\sqrt{5}}{3}$
- C. $\frac{3+\sqrt{17}}{4}$
- D. $\frac{5+\sqrt{11}}{4}$
8. 已知 $a < 0$, 函数 $f(x) = x^{a+1} \cdot e^x + a \ln x$, 若 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为
- A. $-\sqrt{e} - 1$
- B. $1 - e$
- C. $-\frac{1}{e}$
- D. $-e$
- 二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 下列命题正确的有

- A. 若方程 $x^2 + y^2 + mx - 2y + 3 = 0$ 表示圆, 则 m 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- B. 若圆 C 的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x - 3y = 0$ 和 x 轴都相切, 则该圆的标准方程是 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
- C. 已知点 $P(x, y)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$ 上, $\frac{y}{x}$ 的最大值为 1
- D. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$, 圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦长为 $2\sqrt{7}$

10. 下列说法正确的是

- A. 将一组数据中的每个数据都乘以同一个非零常数 a 后, 方差也变为原来的 a 倍
- B. 若四条线段的长度分别是 1, 3, 5, 7, 从中任取 3 条, 则这 3 条线段能构成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$

C. 线性相关系数 r 越大,两个变量的线性相关性越强;反之,线性相关性越弱;

D. 设两个独立事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生且 B 不发生的概率与 B 发生且 A 不发生的概率相同,则事件 A 发生的概率为 $\frac{2}{3}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 能确定 $\angle C$ 为锐角的有

A. $a^2 + b^2 > c^2$

B. $\vec{AC} \cdot \vec{CB} > 0$

C. A, B 均为锐角, 且 $\sin A > \cos B$

D. $\sin A = 2 \sin C$

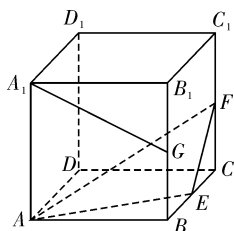
12. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点, 则

A. $D_1D \perp AF$

B. $A_1G \parallel$ 平面 AEF

C. 异面直线 A_1G 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

D. 点 G 到平面 AEF 的距离是点 C 到平面 AEF 的距离的 2 倍



选择题答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k, k=1, 2, 3$, 则 a 的值为 _____.

14. 将标号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的 6 个小球放入 3 个不同的盒子中. 若每个盒子放 2 个, 其中标号为 1, 2 的小球放入同一盒子中, 则不同的方法共有 _____ 种.

15. 若 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 1, 圆心为 O . $2\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \mathbf{0}$, 且 $|\vec{OA}| = |\vec{AB}|$, 则 $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ 等于 _____.

16. “横看成岭侧成峰, 远近高低各不同.” 同一事物从不同角度看, 我们会有不同的认识. 请解决以下问题: 设函数 $f(x) = ax^2 + (2b+1)x - a - 2$ ($a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0$) 在 $[3, 4]$ 至少有一个零点, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,在以下三个条件中任

选一个:① $(\sin B - \sin C)^2 = \sin^2 A - \sin B \sin C$; ② $\sin \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$;

③ $b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$;

并解答以下问题:

(1)若选_____ (填序号),求 $\angle A$ 的值;

(2)在(1)的条件下,若 $a = \sqrt{3}, b = m (m > 0)$,当 $\triangle ABC$ 有且只有一解时,求实数 m 的范围及 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

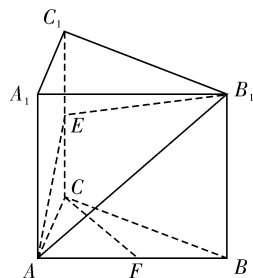
19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $\angle ACB=90^\circ$, E 是棱 CC_1 上动点, F 是 AB 中点, $AC=BC=2$, $AA_1=4$.

(1) 当 E 是棱 CC_1 中点时, 求证: $CF \parallel$ 平面 AEB_1 ;

(2) 在棱 CC_1 上是否存在点 E , 使得二面角 $A-EB_1-B$ 的大小是 45° ?

若存在, 求 CE 的长; 若不存在, 请说明理由.



20. (本小题满分 12 分)

为迎接新年,方便广大市民春节购物和游玩,某大型游乐场开展优惠活动,该游乐场的收费标准是游玩时间不超过 1 小时免费,超过 1 小时的部分每小时收费标准为 40 元(超过部分不足 1 小时的按 1 小时计算). 甲、乙两人相互独立地来到该游乐场游玩,设甲、乙不超过 1 小时离开的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}$; 1 小时以上且不超过 2 小时离开的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$, 又知两人游玩时间都不会超过 3 小时.

(1) 求甲、乙两人所付费用相同的概率;

(2) 设甲、乙两人所付的费用之和为随机变量 ξ . 求 ξ 的分布列与数学期望 $E(\xi)$.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 C 过点 $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 且与曲线 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 有共同的焦点.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 过椭圆的右焦点 F_2 作直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 设 $\overrightarrow{F_2A} = \lambda \overrightarrow{F_2B}$, 若 $\lambda \in [-2, -1]$, 点 $T(2, 0)$, 求 $|\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|$ 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x + e^{-x}$, 其中 e 是自然对数的底数.

(1) 设存在 $x_0 \in [1, +\infty)$, 使得 $f(x_0) < a(-x_0^3 + 3x_0)$ 成立, 求正实数 a 的取值集合 A ;

(2) 若 $a \in A$, 比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小, 并证明你的结论.

湖南师大附中 2021 届高三三月考试卷(六)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	B	A	D	B	C	D	BD	BD	ACD	BCD

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. A 【解析】由已知 $z+i=zi \Rightarrow z=\frac{-i}{1-i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i, \therefore \bar{z}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

2. C 【解析】由已知得 $A=\{x|\frac{1}{3}<x<3\}, B=\{y|1\leq y\leq 4\}, \therefore A\cap B=[1,3)$.

3. B 【解析】由 $1+3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}\geq 110, \therefore 3^n\geq 221$, 得 $n\geq 5$.

5. D 【解析】 $p=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{0.6}{0.8}=0.75$.

7. C 【解析】连接 F_1B, F_2A , 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 有 $\cos\angle AF_1F_2=\frac{4c^2+(2c-2a)^2-4c^2}{2\cdot 2c\cdot (2c-2a)}=\frac{c-a}{2c}$, 在 $\triangle BF_1F_2$ 中, 有 $\cos\angle BF_2F_1=\frac{4c^2+4c^2-(2c+2a)^2}{2\cdot 2c\cdot 2c}=\frac{c^2-2ac-a^2}{2c^2}$, 因为 $F_1A\parallel F_2B$, 所以 $\angle AF_1F_2+\angle BF_2F_1=\pi$, 即 $\cos\angle AF_1F_2+\cos\angle BF_2F_1=0$, 即 $\frac{c^2-2ac-a^2}{2c^2}+\frac{c-a}{2c}=0$, 化简得 $e=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$, 负值舍去.

8. D 【解析】 $f(x)\geq 0$, 即 $x^{a+1}\cdot e^x\geq -a\ln x, \therefore x\cdot e^x\geq -\frac{a\ln x}{x^a}=\frac{\ln \frac{1}{x^a}}{x^a}=e^{\ln \frac{1}{x^a}}\cdot \ln \frac{1}{x^a}, \therefore x\geq \ln \frac{1}{x^a}$ 恒成立, $a\geq \left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max}, \therefore a\geq -e$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.

9. BD 【解析】对于 A, 圆方程可化为 $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{m^2}{4}-2$. 由于该方程表示圆, 故 $\frac{m^2}{4}-2>0$, 解得 $m\in(-\infty, -2\sqrt{2})\cup(2\sqrt{2}, +\infty)$, 故 A 错误; 对于 B, $\because$ 圆 C 的半径为 1, 圆心在第一象限, 且与直线 $4x-3y=0$ 和 x 轴都相切, $\therefore$ 圆心的纵坐标是 1, 设圆心坐标 $(a, 1)$, 则 $1=\frac{|4a-3|}{5}$, 又 $a>0, \therefore a=2, \therefore$ 该圆的标准方程是 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$, 故 B 正确; 对于 C, 设 $k=\frac{y}{x}$, 即 $kx-y=0$, 则圆的标准方程为 $(x-3)^2+(y-3)^2=4$, 则圆心坐标为 $(3, 3)$, 半径 $R=2$, 则圆心到直线的距离 $d\leq R$, 即 $\frac{|3k-3|}{\sqrt{1+k^2}}\leq 2$, 即 $|3k-3|\leq 2\sqrt{1+k^2}$, 平方得 $5k^2-18k+5\leq 0$, 解得 $\frac{9-2\sqrt{14}}{5}\leq k\leq \frac{9+2\sqrt{14}}{5}$, 故 $\frac{y}{x}$ 的最大值是 $\frac{9+2\sqrt{14}}{5}$, 故 C 错误; 对于 D, 两圆方程相减, 得圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在直线方程为: $8x+6y-46=0$, 即 $4x+3y-23=0$. 圆心 $C_2(5, 6)$ 到直线 $4x+3y-23=0$ 的距离 $d=\frac{|4\times 5+3\times 6-23|}{\sqrt{16+9}}=3, \therefore$ 圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦长 $|AB|=2\sqrt{r_2^2-d^2}=2\sqrt{16-9}=2\sqrt{7}$, 故 D 正确.

10. BD 【解析】设一组数据为 X , 则每个数据都乘以同一个非零常数 a 后, 可得 $Y=aX$, 则 $D(Y)=D(aX)=a^2D(X)$, 所以方差变为原来的 a^2 倍, 故 A 不正确. 从中任取 3 条有 4 种取法, 其中能构成三角形的只有 3, 5, 7 一种, 故这 3 条线段能构成三角形的概率为 $\frac{1}{4}$, 故 B 正确. 由 $|r| \rightarrow 1$, 两个变量的线性相关性越强, $|r| \rightarrow 0$, 两个变量的线性相关性越弱, 故 C 不正确. 根据题意可得 $P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = \frac{1}{9}$, $P(\bar{A}) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(\bar{B})$, 设 $P(A)=x, P(B)=y$, 则 $\begin{cases} (1-x)(1-y) = \frac{1}{9}, \\ (1-x) \cdot y = (1-y) \cdot x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 1-x-y+xy = \frac{1}{9}, \\ x=y, \end{cases}$ 即 $x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{9}$, 解得 $x = \frac{2}{3}$ 或 $\frac{4}{3}$ (舍), 所以事件 A 发生的概率为 $\frac{2}{3}$, 故 D 正确.

11. ACD 【解析】对于 A, $\because a^2 + b^2 > c^2, \therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0, \therefore \angle C$ 为锐角, 故 A 正确; 对于 B, $\because \vec{AC} \cdot \vec{CB} > 0, \therefore |\vec{AC}| |\vec{CB}| \cos(\pi - C) > 0, \therefore \cos C < 0, \therefore \angle C$ 为钝角, 故 B 错误; 对于 C, $\because A, B$ 均为锐角, 且 $\sin A > \cos B, \therefore \sin A > \cos B = \sin(\frac{\pi}{2} - B), \therefore A > \frac{\pi}{2} - B$, 可得 $A + B > \frac{\pi}{2}$, 则 $\angle C$ 为锐角, 故 C 正确; 对于 D, $\because \sin A = 2 \sin C$, 由正弦定理得, $a = 2c, \therefore a > c$, 则 $A > C, \therefore \angle C$ 为锐角, 故 D 正确.

12. BCD 【解析】A 选项, 由 $DD_1 \parallel CC_1$, 即 CC_1 与 AF 并不垂直, 所以 $D_1D \perp AF$ 错误. B 选项, 如图 1, 延长 FE, GB 交于 G' , 连接 AG', GF , 有 $GF \parallel BE$, 又 E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点, 所以 $GG' = BB_1 = AA_1$, 而 $AA_1 \parallel GG'$, 即 $A_1G \parallel AG'$; 又因为面 $ABB_1A_1 \cap$ 面 $AEF = AG'$, 且 $A_1G \not\subset$ 面 $AEF, A_1G \subset$ 面 ABB_1A_1 , 所以 $A_1G \parallel$ 平面 AEF , 故正确. C 选项, 取 B_1C_1 中点 H , 连接 GH , 由题意知 GH 与 EF 平行且相等, 所以异面直线 A_1G 与 EF 所成角的平面角为 $\angle A_1GH$, 若正方体棱长为 2, 则有 $GH = \sqrt{2}, A_1G = A_1H = \sqrt{5}$, 即在 $\triangle A_1GH$ 中有 $\cos \angle A_1GH = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 故正确. D 选项, 如图 2, 若设 G 到平面 AEF 的距离、 C 到平面 AEF 的距离分别为 h_1, h_2 , 则由 $V_{A-GEF} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{\triangle GEF} = V_{G-AEF} = \frac{1}{3} \cdot h_1 \cdot S_{\triangle AEF}$ 且 $V_{A-CEF} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{\triangle CEF} = V_{C-AEF} = \frac{1}{3} \cdot h_2 \cdot S_{\triangle AEF}$, 知 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_{\triangle GEF}}{S_{\triangle CEF}} = 2$, 故正确.

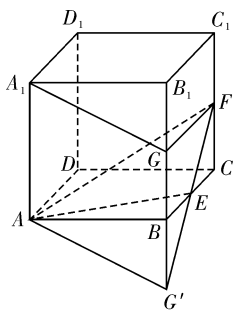


图1

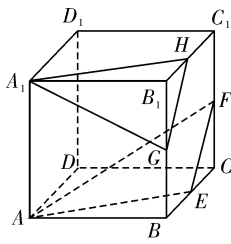
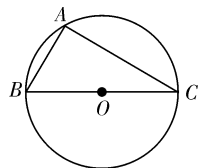


图2

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $\frac{27}{13}$ 【解析】因为随机变量 X 的分布列为 $P(X=k) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k, k=1, 2, 3$, 所以根据分布列的性质有 $a \cdot \frac{1}{3} + a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1$, 所以 $a \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}\right) = a \times \frac{13}{27} = 1$, 所以 $a = \frac{27}{13}$.
14. 18 【解析】先将标号为 1, 2 的小球放入盒子, 有 3 种情况; 再将剩下的 4 个球平均放入剩下的 2 个盒子中, 共有 $C_4^2 = 6$ 种情况, 所以不同的方法共有 $3 \times 6 = 18$ (种).

- 15.3 【解析】由题意, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{OA}$, 所以 O 是边 BC 的中点, 又因为 O 是外接圆圆心, 所以 BC 是外接圆直径, $\angle A = 90^\circ$, $BC = 2OA = 2$, 如图所示, 因为 $OB = OA = AB$, 所以 $\angle B = 60^\circ$, 所以 $\angle C = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$, $CA = CB \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$. 所以 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ = 3$.



16. $\frac{1}{100}$ 【解析】把等式看成关于 a, b 的直线方程: $(x^2 - 1)a + 2xb + x - 2 = 0$, 由于直线上一点 (a, b) 到原点的距离大于等于原点到直线的距离, 即 $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{|x-2|}{\sqrt{(x^2-1)^2 + (2x)^2}}$, 所以 $a^2 + b^2 \geq \left(\frac{x-2}{1+x^2}\right)^2 = \frac{1}{\left(x-2+\frac{5}{x-2}+4\right)^2}$, $\because x-2+\frac{5}{x-2}$ 在 $[3, 4]$ 是减函数, $\therefore 2+\frac{5}{2} \leq x-2+\frac{5}{x-2} \leq 1+5$; 即 $\frac{9}{2} \leq x-2+\frac{5}{x-2} \leq 6$; 故 $\frac{1}{\left(x-2+\frac{5}{x-2}+4\right)^2} \geq \frac{1}{100}$; 当 $x=3, a=-\frac{2}{25}, b=-\frac{3}{50}$ 时取等号, 故 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{100}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 【解析】(1) 若选①, 由已知得 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \sin B \sin C$,

故由正弦定理得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$.

因为 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 60^\circ$ 5 分

若选②, 由二倍角公式 $\cos \frac{A}{2} = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos A = 2\cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ 5 分

若选③, 由题设及正弦定理得 $\sin B \sin \frac{B+C}{2} = \sin A \sin B$.

因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin \frac{B+C}{2} = \sin A$.

由 $A+B+C=180^\circ$, 可得 $\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2}$, 故 $\cos \frac{A}{2} = 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$.

因为 $\cos \frac{A}{2} \neq 0$, 故 $\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$, 因此 $A = 60^\circ$ 5 分

(2) 由已知, 当 $\triangle ABC$ 有且只有一解时, $m \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 或 $0 < m \leq \sqrt{3}$, $\therefore m \in (0, \sqrt{3}] \cup \{2\}$,

① 当 $m=2$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形, $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

② 当 $0 < m \leq \sqrt{3}$ 时, $\therefore a = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3}$,

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \geq 2bc - bc = bc$,

$\therefore bc \leq 3$, 当且仅当 $b=c$ 时等号成立,

$\therefore$ 三角形面积为 $S = \frac{1}{2} bc \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\therefore \triangle ABC$ 面积的最大值 $S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 10 分

18. 【解析】(1) 由题意知, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 5$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 11$, 所以 $a_n = 6n + 5$.

设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d . 由 $\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2, \\ a_2 = b_2 + b_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 11 = 2b_1 + d, \\ 17 = 2b_1 + 3d, \end{cases}$

可解得 $b_1=4, d=3$, 所以 $b_n=3n+1$ 6 分

(2) 由(1)知, $c_n = \frac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n} = 3(n+1) \cdot 2^{n+1}$.

又 $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$, 得 $T_n = 3 \times [2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + (n+1) \times 2^{n+1}]$,

$2T_n = 3 \times [2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + (n+1) \times 2^{n+2}]$.

两式作差, 得 $-T_n = 3 \times [2 \times 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1} - (n+1) \times 2^{n+2}] = 3 \times \left[4 + \frac{4(1-2^n)}{1-2} - (n+1) \times 2^{n+2} \right]$

$= -3n \cdot 2^{n+2}$, 所以 $T_n = 3n \cdot 2^{n+2}$ 12 分

19. 【解析】(1) 取 AB_1 的中点 G , 联结 EG, FG ,

$\because F, G$ 分别是 AB, AB_1 中点, $\therefore FG \parallel BB_1, FG = \frac{1}{2}BB_1$, 又 $\because FG \parallel EC, FG = EC$,

$\therefore$ 四边形 $FGEC$ 是平行四边形, $\therefore CF \parallel EG$. $\because CF \not\subset$ 平面 $AEB_1, EG \subset$ 平面 AEB_1 ,

$\therefore CF \parallel$ 平面 AEB_1 5 分

(2) 以 C 为坐标原点, 射线 CA, CB, CC_1 为 x, y, z 轴正半轴,

建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$.

则 $C(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B_1(0, 2, 4)$ 8 分

设 $E(0, 0, m)$, 平面 AEB_1 的法向量 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\overrightarrow{AB_1} = (-2, 2, 4), \overrightarrow{AE} = (-2, 0, m)$,

且 $\overrightarrow{AB_1} \perp \mathbf{n}, \overrightarrow{AE} \perp \mathbf{n}$.

于是 $\begin{cases} \overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n} = -2x + 2y + 4z = 0, \\ \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = -2x + 0y + mz = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x = \frac{mz}{2}, \\ y = \frac{mz - 4z}{2}, \end{cases}$

取 $z=2$, 则 $\mathbf{n} = (m, m-4, 2)$,

三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直棱柱, $\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

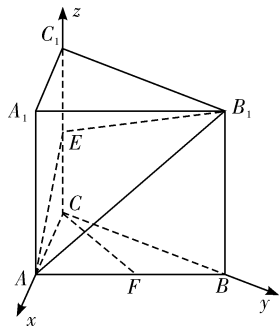
又 $\because AC \subset$ 平面 $ABC, \therefore AC \perp BB_1, \because \angle ACB = 90^\circ, \therefore AC \perp BC$,

$\because BB_1 \cap BC = B, \therefore AC \perp$ 平面 $ECBB_1, \therefore \overrightarrow{CA}$ 是平面 EBB_1 的法向量,

$\overrightarrow{CA} = (2, 0, 0)$, 二面角 $A-EB_1-B$ 的大小是 45° ,

则 $\cos 45^\circ = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2m}{2 \times \sqrt{m^2 + (m-4)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 解得 $m = \frac{5}{2}$.

$\therefore$ 在棱 CC_1 上存在点 E , 使得二面角 $A-EB_1-B$ 的大小是 45° , 此时 $CE = \frac{5}{2}$ 12 分



20. 【解析】(1) 若两人所付费用相同, 则相同的费用可能为 0 元, 40 元, 80 元.

两人都付 0 元的概率为 $P_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$;

两人都付 40 元的概率为 $P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$;

两人都付 80 元的概率为 $P_3 = \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$;

则两人所付费用相同的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{5}{12}$ 4 分

(2) 由题意得 ξ 的所有可能取值为 0, 40, 80, 120, 160.

$P(\xi=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$;

$$\begin{aligned}
 P(\xi=40) &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}; \\
 P(\xi=80) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{12}; \\
 P(\xi=120) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}; \\
 P(\xi=160) &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

ξ 的分布列为

ξ	0	40	80	120	160
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{10}{24}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{24}$

$$E(\xi) = 0 \times \frac{1}{24} + 40 \times \frac{1}{4} + 80 \times \frac{5}{12} + 120 \times \frac{1}{4} + 160 \times \frac{1}{24} = 80. \quad \cdots \cdots \cdots 12 \text{ 分}$$

21.【解析】(1)设椭圆的焦距为 $2c$, 由题意, 得 $c=1$,

设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$,

$$\text{则 } \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1,$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + 1,$$

$$\text{解得 } b^2 = 1 \text{ 或 } b^2 = -\frac{1}{2} \text{ (舍去)},$$

$$\text{所以 } a^2 = b^2 + 1 = 2.$$

$$\text{故椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1. \quad \cdots \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(2)由题意设直线 l 的方程为 $x=my+1$.

$$\text{将直线 } l \text{ 的方程代入 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \text{ 中, 得 } (m^2+2)y^2 + 2my - 1 = 0.$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), y_1 y_2 \neq 0, \text{ 可得 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2+2}, \quad \textcircled{1}$$

$$y_1 y_2 = -\frac{1}{m^2+2}. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{将上面两式} \textcircled{1} \text{ 式平方除以 } \textcircled{2} \text{ 式, 得 } \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + 2 = -\frac{4m^2}{m^2+2}.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{F_2 A} = \lambda \overrightarrow{F_2 B}, \text{ 所以 } \frac{y_1}{y_2} = \lambda, \text{ 且 } \lambda < 0.$$

$$\text{则 } \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_1} + 2 = -\frac{4m^2}{m^2+2} \Rightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 = -\frac{4m^2}{m^2+2},$$

$$\text{由 } \lambda \in [-2, -1] \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq \lambda + \frac{1}{\lambda} \leq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \lambda + \frac{1}{\lambda} + 2 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{4m^2}{m^2+2} \leq 0, \text{ 所以 } 0 \leq m^2 \leq \frac{2}{7}.$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{TA} = (x_1 - 2, y_1), \overrightarrow{TB} = (x_2 - 2, y_2),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} = (x_1 + x_2 - 4, y_1 + y_2).$$

$$\text{又 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2+2}, \text{ 所以 } x_1 + x_2 - 4 = m(y_1 + y_2) - 2 = -\frac{4(m^2+1)}{m^2+2},$$

$$\text{故 } |\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|^2 = (x_1 + x_2 - 4)^2 + (y_1 + y_2)^2$$

$$= \frac{16(m^2+1)^2}{(m^2+2)^2} + \frac{4m^2}{(m^2+2)^2} = \frac{16(m^2+2)^2 - 28(m^2+2) + 8}{(m^2+2)^2} = 16 - \frac{28}{m^2+2} + \frac{8}{(m^2+2)^2},$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{m^2+2}, \text{ 因为 } 0 \leq m^2 \leq \frac{2}{7},$$

$$\text{所以 } \frac{7}{16} \leq \frac{1}{m^2+2} \leq \frac{1}{2}, \text{ 即 } t \in \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2} \right],$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|^2 = 8t^2 - 28t + 16 = 8\left(t - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{17}{2}.$$

$$\text{而 } t \in \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2} \right], \text{ 所以 } |\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}|^2 \in \left[4, \frac{169}{32} \right].$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB}| \in \left[2, \frac{13\sqrt{2}}{8} \right]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

22. 【解析】(1) 令函数 $g(x) = e^x + \frac{1}{e^x} - a(-x^3 + 3x)$,

$$\text{则 } g'(x) = e^x - \frac{1}{e^x} + 3a(x^2 - 1).$$

$$\text{当 } x \geq 1 \text{ 时, } e^x - \frac{1}{e^x} > 0, x^2 - 1 \geq 0,$$

$$\text{又 } a > 0, \text{ 故 } g'(x) > 0.$$

所以 $g(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的单调增函数,

$$\text{因此 } g(x) \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 的最小值是 } g(1) = e + e^{-1} - 2a.$$

$$\text{由于存在 } x_0 \in [1, +\infty), \text{ 使 } e^{x_0} + e^{-x_0} - a(-x_0^3 + 3x_0) < 0 \text{ 成立,}$$

$$\text{当且仅当最小值 } g(1) < 0.$$

$$\text{故 } e + e^{-1} - 2a < 0, \text{ 即 } a > \frac{e + e^{-1}}{2}, \text{ 则 } A = \left(\frac{e + e^{-1}}{2}, +\infty \right). \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 令函数 } h(x) = x - (e-1)\ln x - 1, \text{ 则 } h'(x) = 1 - \frac{e-1}{x}.$$

$$\text{令 } h'(x) = 0, \text{ 得 } x = e-1,$$

$$\text{当 } x \in (0, e-1) \text{ 时, } h'(x) < 0, \text{ 故 } h(x) \text{ 是 } (0, e-1) \text{ 上的单调减函数.}$$

$$\text{当 } x \in (e-1, +\infty) \text{ 时, } h'(x) > 0, \text{ 故 } h(x) \text{ 是 } (e-1, +\infty) \text{ 上的单调增函数.}$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上的最小值是 } h(e-1).$$

$$\text{注意到 } h(1) = h(e) = 0,$$

$$\text{所以当 } x \in (1, e-1) \subseteq (0, e-1) \text{ 时, } h(e-1) < h(x) < h(1) = 0.$$

$$\text{当 } x \in (e-1, e) \subseteq (e-1, +\infty) \text{ 时, } h(x) < h(e) = 0.$$

$$\text{所以 } h(x) < 0 \text{ 对任意的 } x \in (1, e) \text{ 成立.}$$

$$\text{① 当 } a \in \left(\frac{e + e^{-1}}{2}, e \right) \subseteq (1, e) \text{ 时, } h(a) < 0, \text{ 即 } a - 1 < (e-1)\ln a, \text{ 从而 } e^{a-1} < a^{e-1};$$

$$\text{② 当 } a = e \text{ 时, } e^{a-1} = a^{e-1};$$

$$\text{③ 当 } a \in (e, +\infty) \subseteq (e-1, +\infty) \text{ 时, } h(a) > h(e) = 0, \text{ 即 } a - 1 > (e-1)\ln a, \\ \text{故 } e^{a-1} > a^{e-1}.$$

$$\text{综上所述, 当 } a \in \left(\frac{e + e^{-1}}{2}, e \right) \text{ 时, } e^{a-1} < a^{e-1};$$

$$\text{当 } a = e \text{ 时, } e^{a-1} = a^{e-1};$$

$$\text{当 } a \in (e, +\infty) \text{ 时, } e^{a-1} > a^{e-1}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$