襄阳五中2019级高三数学开学考试

一、单项选择题：每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M=\{x|1-a<x<2a\}$，$N=(1,4)$，且 $M\subseteq N$，则实数 a 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,2]$　B. $(-\infty,0]$　C. $(-\infty,\frac{1}{3}]$　D. $\left[\frac{1}{3},2\right]$

2. 复数 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}^3}$ 的共轭复数为（　　）

A. $1+\mathrm{i}$　B. $1-\mathrm{i}$　C. i　D. $-\mathrm{i}$

3. 已知两条不同的直线 l，m 和不重合的两个平面 α，β，且 $l//\beta$，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $\alpha//\beta$，则 $l//\alpha$　B. 若 $m\perp\beta$，则 $l\perp m$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp\alpha$　D. 若 $l\perp m$，则 $m\perp\beta$

4. 过抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于A，B 两点，若 l 的倾斜角为 $45°$，则线段 AB 的中点到 x 轴的距离是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. 2　C. 4　D. 3

5. 已知 x_1，x_2，是函数

$$f(x)=\tan(\omega x-\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$$

的两个零点，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于原点对称，则 φ 的最大值为（　　）

A. $\frac{3\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{7\pi}{8}$　D. $\frac{\pi}{8}$

6. 已知离散型随机变量 X 的所有可能取值为0，1，2，3，且 $P(X\geq1)=\frac{2}{3}$，$P(X=3)=\frac{1}{6}$，若 X 的数学期望 $E(X)=\frac{5}{4}$，则 $D(4X-3)=$（　　）

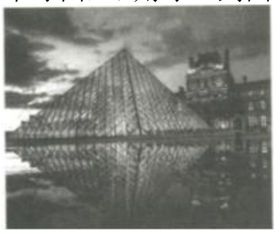
A. 19　B. 16　C. $\frac{19}{4}$　D. $\frac{7}{4}$

7. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}bx^2+cx$ 的导函数 $f'(x)$ 是偶函数，若方程 $f'(x)-\ln x=0$ 在区间 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}\right]$(其中 e 为自然对数的底)上有两个不相等的实数根，则实数 c 的取值范围是（　　）

A. $\left[-1-\frac{1}{2\mathrm{e}^2},-\frac{1}{2}\right]$　B. $\left[-1-\frac{1}{2\mathrm{e}^2},-\frac{1}{2}\right)$

C. $\left[1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2,-\frac{1}{2}\right)$　D. $\left[1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^2,-\frac{1}{2}\right]$

8. 卢浮宫金字塔位于巴黎卢浮宫的主院，由美籍华人建筑师贝聿铭设计，已成为巴黎的城市地标.金字塔为正四棱锥造型，该正四棱锥的底面边长为 a，高为 $\frac{2}{3}a$，若该四棱锥的五个顶点都在一个球面上，则球心到四棱锥侧面的距离为（　　）



A. $\frac{17}{40}a$　B. $\frac{5}{8}a$

C. $\frac{5\sqrt{5}}{24}a$　D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 下列不等式正确的是（　　）

A. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$e^x\geq x+1$

B. 当 $x>0$ 时，$\ln x\leq x-1$

C. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$e^x\geq ex$

D. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$x\geq\sin x$

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x\in R$，有 $f(x)=f(6-x)$，且 $f(x+2)=f(x-2)$，当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$，则下列说法正确的是（　　）

A. $f(2021)=0$

B. $x\in(2020,2022)$ 时，$f(x)$ 单调递增

C. $f(x)$ 关于点 $(1010,0)$ 对称

D. $x\in(-1,11)$ 时，方程 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的所有根的和为30

11. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，C 的一条渐近线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}x$，且 F_1 到 l 的距离为 $3\sqrt{3}$，点 P 为 C 在第一象限上的点，点 Q 的坐标为 $(2,0)$，PQ 为 $\angle F_1PF_2$ 的平分线.则下列正确的是（　　）

A. 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

B. $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=2$

C. $\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=3\sqrt{6}$

D. 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=e^x\cdot x^3$，则以下结论正确的是(　　)

A. $f(x)$ 在R上单调递增

B. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)<f(-\log_5 0.2)<f(\ln\pi)$

C. 方程 $f(x)=-1$ 有实数解

D. 存在实数 k，使得方程 $f(x)=kx$ 有4个实数解

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为45°，$k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 k=__________.

14. 过直线$l:x+y-2\sqrt{2}=0$上一点P作圆：$x^2+y^2=1$的两条切线的夹角为60°，则点P的坐标为______.

15. 某省派出由4名医生、5名护士组成的医疗小组前往疫区支援，要求将这9名医护人员平均派往某地的A，B，C 3家医院，且每家医院至少要分到一名医生和一名护士，则不同的分配方案有______种.（**用数字作答**）

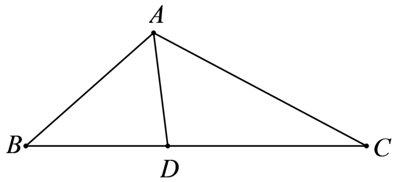
16. 三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面ABC，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AP=3$，$AB=2\sqrt{3}$，$Q$是$BC$边上的的一个动点，且直线$PQ$与面$ABC$所成角的最大值为$\dfrac{\pi}{3}$，则该三棱锥外接球的表面积为______.

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB=6$，$\cos B=\dfrac{3}{4}$，点D在BC边上，$AD=4$，$\angle ADB$为锐角.

（1）若$AC=6\sqrt{2}$，求线段DC的长度;

（2）若$\angle BAD=2\angle DAC$，求$\sin C$的值.

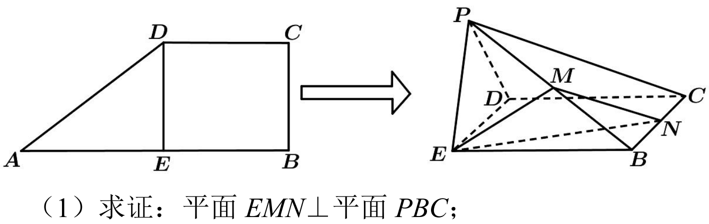


18. 在①$a_3^2=a_2a_4+4$，②$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$是公差为1的等差数列，③$S_4^2=S_2\cdot S_8$，这三个条件中任选一个，补充到下面的问题中并作答.

问题：在递增的等差数列$\{a_n\}$中，S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，______，数列$\{b_n\}$是首项为2，公比为2的等比数列，设$c_n=a_n\cdot b_n$，T_n为数列$\{c_n\}$的前n项和，求使$T_n>2000$成立的最小正整数n的值.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

19. 如图，在直角梯形$ABCD$中，$AB//DC$，$\angle ABC$=90°，AB=2DC=2BC，E为AB的中点，沿DE将△ADE折起，使得点A到点P位置，且$PE\perp EB$，M为PB的中点，N是BC上的动点(与点B，C不重合).



（1）求证：平面$EMN\perp$平面PBC;

（2）是否存在点N，使得二面角$B-EN-M$的余弦值$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$？若存在，确定N点位置；若不存在，说明理由.

20. 2021年4月15日是第6个全民国家安全教育日，某社区为增强居民的国家安全意识，举行了国家安全知识竞赛.第一轮比赛共设有四道题，规定:

答对第一道题得1分，答对第二道题得2分，答对第三道题得3分，答对第四道题得6分，这4道题，任意一道答错扣2分.每答完一题，分数进行累加，

当答题者累计得分低于-2分时，停止答题，淘汰；当答题者累计得分大于等于4分时，答题结束进入下一轮；当四题答完，累计得分低于四分，则答题结束，淘汰出局；当答完四题，累计得分不低于4分时，答题结束，进入下一轮.

每位答题者都按题号顺序进行答题，直至答题结束.

假设参赛者甲对第一、二、三、四题回答正确的概率依次为$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，且各题回答正确与否相互之间没有影响.

（1）求甲同学能进入下一轮的概率;

（2）用ξ表示甲同学本轮答题结束时答题的个数，求ξ的分布列和数学期望$E(\xi)$.

21. 已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左、右顶点分别为$A$，$B$，$O$为坐标原点，直线$l$：$x=1$与$C$的两个交点和$O$，$B$构成一个面积为$\sqrt{6}$的菱形.

（1）求C的方程;

（2）圆E过O，B，交l于点M，N，直线AM，AN分别交C于另一点P，Q，点S，T满足$\overrightarrow{AS}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SP}$，$\overrightarrow{AT}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$，求$O$到直线$ST$和直线$PQ$的距离之和的最大值.

22. 已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+a$.

（1）若$f(x)$有两个零点，求a的取值范围;

（2）设$g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x}$，若对任意的$x\in(0,+\infty)$，都有$g(x)\le e^x$恒成立，求a的取值范围.