

一、单项选择题：每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M = \{x | 1 - a < x < 2a\}$ ， $N = (1, 4)$ ，且 $M \subseteq N$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $(-\infty, 0]$ C. $(-\infty, \frac{1}{3}]$ D. $[\frac{1}{3}, 2]$

【答案】C

2. 复数 $z = \frac{1-i}{i^3}$ 的共轭复数为 ()

- A. $1+i$ B. $1-i$ C. i D. $-i$

【答案】B

3. 已知两条不同的直线 l ， m 和不重合的两个平面 α ， β ，且 $l // \beta$ ，则下列说法正确的是 ()

- A. 若 $\alpha // \beta$ ，则 $l // \alpha$ B. 若 $m \perp \beta$ ，则 $l \perp m$
C. 若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $l \perp \alpha$ D. 若 $l \perp m$ ，则 $m \perp \beta$

【答案】B

4. 过抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的直线 l 与抛物线交于 A ， B 两点，若 l 的倾斜角为 45° ，则线段 AB 的中点到 x 轴的距离是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 4 D. 3

【答案】D

5. 已知 x_1, x_2 ，是函数 $f(x) = \tan(\omega x - \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的两个零点，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$ ，若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到的图象关于原点对称，则 φ 的最大值为 ()

- A. $\frac{3\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{7\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{8}$

【答案】A

【详解】由题意知函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{\pi}{3}$ ，则 $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{3}$ ，得 $\omega = 3$ ， $\therefore f(x) = \tan(3x - \varphi)$ ．

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y = \tan\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right) - \varphi\right] = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4} - \varphi\right)$ 的图象，

要使该图象关于原点对称, 则 $\frac{\pi}{4} - \varphi = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$,

又 $0 < \varphi < \pi$, 所以当 $k = -1$ 时, φ 取得最大值, 最大值为 $\frac{3\pi}{4}$. 故选: A

6. 已知离散型随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $P(X \geq 1) = \frac{2}{3}$, $P(X=3) = \frac{1}{6}$, 若 X 的数学期望 $E(X) = \frac{5}{4}$, 则 $D(4X-3) = (\quad)$

- A. 19 B. 16 C. $\frac{19}{4}$ D. $\frac{7}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先设 $P(X=1) = a$, 利用期望公式, 计算 $E(X) = \frac{5}{4}$, 求实数 a , 再根据分布列求 $D(X)$, 根据方差的性质 $D(4X-3) = 16D(X)$, 计算结果.

【详解】由题知 $P(X=0) = \frac{1}{3}$, 设 $P(X=1) = a$, 则 $P(X=2) = \frac{1}{2} - a$, 因此 $E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times a + 2 \times \left(\frac{1}{2} - a\right) + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{4}$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, 因此离散型随机变量 X 的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

则 $D(X) = \frac{1}{3} \times \left(0 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \times \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(3 - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{19}{16}$, 因此

$D(4X-3) = 16D(X) = 19$. 故选: A

7. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$ 的导函数 $f'(x)$ 是偶函数, 若方程 $f'(x) - \ln x = 0$ 在区间

$\left[\frac{1}{e}, e\right]$ (其中 e 为自然对数的底) 上有两个不相等的实数根, 则实数 c 的取值范围是

- A. $\left[-1 - \frac{1}{2e^2}, -\frac{1}{2}\right]$ B. $\left[-1 - \frac{1}{2e^2}, -\frac{1}{2}\right)$ C. $\left[1 - \frac{1}{2}e^2, -\frac{1}{2}\right)$ D. $\left[1 - \frac{1}{2}e^2, -\frac{1}{2}\right]$

【答案】B 【详解】Q $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx$, $\therefore f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$,

导函数 $y = f'(x)$ 的对称轴为直线 $x = -b$, 由于该函数为偶函数, 则 $-b = 0 \Rightarrow b = 0$,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + c, \text{ 令 } f'(x) - \ln x = 0, \text{ 即 } \frac{1}{2}x^2 + c - \ln x = 0, \text{ 得 } c = \ln x - \frac{1}{2}x^2.$$

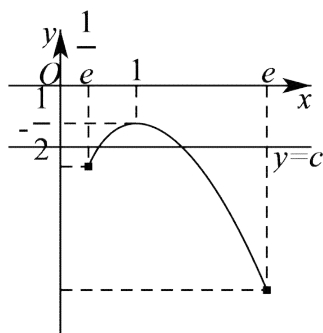
问题转化为当直线 $y = c$ 与函数 $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 在区间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上的图像有两个交点时, 求实数 c 的取值范围.

$$g'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = 1, \text{ 列表如下:}$$

x	$\left(\frac{1}{e}, 1\right)$	1	$(1, e)$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\square$	极大值	$\square$

所以, 函数 $y = g(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 亦即最大值, $g(x)_{\max} = g(1) = -\frac{1}{2}$,

又 $g\left(\frac{1}{e}\right) = -1 - \frac{1}{2e^2}$, $g(e) = 1 - \frac{e^2}{2}$, 显然, $g(e) < g\left(\frac{1}{e}\right)$, 如下图所示:



结合图象可知, 当 $g\left(\frac{1}{e}\right) \leq c < g(1)$ 时, 即当 $-1 - \frac{1}{2e^2} \leq c < -\frac{1}{2}$ 时, 直线 $y = c$ 与函数 $y = g(x)$ 在区

间 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有两个交点, 因此, 实数 c 的取值范围是 $\left[-1 - \frac{1}{2e^2}, -\frac{1}{2}\right)$.

故选 B.

8. 卢浮宫金字塔位于巴黎卢浮宫的主院, 由美籍华人建筑师贝聿铭设计, 已成为巴黎的城市地标. 金字塔为正四棱锥造型, 该正四棱锥的底面边长为 a , 高为 $\frac{2}{3}a$, 若该四棱锥的五个顶点都在一个球面上,

则球心到四棱锥侧面的距离为 ()



- A. $\frac{17}{40}a$ B. $\frac{5}{8}a$ C. $\frac{5\sqrt{5}}{24}a$ D. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$

【答案】A

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 下列不等式正确的是 ()

- A. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \geq x+1$ B. 当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x-1$
C. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \geq ex$ D. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $x \geq \sin x$

【答案】ABC

【解析】对于选项 A: 设 $f(x) = e^x - x - 1$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$,

当 $x \in (-\infty, 0)$ 时函数单调递减, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 函数单调递增,

所以函数在 $x = 0$ 时, 函数取得最小值 $f(x)_{\min} = f(0) = 0$, 故当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \geq x+1$, 故 A 正确;

对于选项 B: 设 $f(x) = \ln x - x + 1$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{-(x-1)}{x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 函数单调递增, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 函数单调递减,

所以在 $x = 1$ 时, $f(x)_{\max} = f(1) = 0$, 故当 $x > 0$ 时, $\ln x \leq x-1$ 恒成立, 故 B 正确;

对于选项 C: 设 $f(x) = e^x - ex$, 所以 $f'(x) = e^x - e$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时,

函数单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 函数单调递增,

所以当 $x = 1$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 0$, 所以当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $e^x \geq ex$, 故 C 正确;

对于选项 D: 设函数 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的奇

函数, 所以 $x > 0$ 时, $x < \sin x$ 成立, $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 故 D 错误.

故选: ABC

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x) = f(6-x)$, 且 $f(x+2) = f(x-2)$, 当 $x \in [-1, 1]$ 时,

$f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$, 则下列说法正确的是 ()

A. $f(2021) = 0$

B. $x \in (2020, 2022)$ 时, $f(x)$ 单调递增

C. $f(x)$ 关于点 $(1010, 0)$ 对称

D. $x \in (-1, 11)$ 时, 方程 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 的所有根的和为 30

【答案】CD

11. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, C 的一条渐近线 l 的方程

为 $y = \sqrt{3}x$, 且 F_1 到 l 的距离为 $3\sqrt{3}$, 点 P 为 C 在第一象限上的点, 点 Q 的坐标为 $(2, 0)$, PQ 为

$\angle F_1PF_2$ 的平分线, 则下列正确的是 ()

A. 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$

B. $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = 2$

C. $|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = 3\sqrt{6}$

D. 点 P 到 x 轴的距离为 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

【答案】ABD

12. 已知函数 $f(x) = e^x \cdot x^3$, 则以下结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增

B. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) < f(-\log_5 0.2) < f(\ln \pi)$

C. 方程 $f(x) = -1$ 有实数解

D. 存在实数 k , 使得方程 $f(x) = kx$ 有 4 个实数

解

【答案】BCD

【解析】

【分析】

对 $f(x)$ 求导, 由导函数的符号可判断 $f(x)$ 的单调性, 即可判断选项 A; 比较

$-3 < e^{-\frac{1}{2}} < 1 < \ln \pi$, 以及 $f(x)$ 的单调性即可判断选项 B; 令 $g(x) = f(x) + 1 = e^x \cdot x^3 + 1$, 由零点存在定理可判断选项 C; $f(x) = kx$ 等价于 $e^x \cdot x^3 = kx$, 有一个根为 $x = 0$, 所以原方程有 4 个根等价于方程 $e^x \cdot x^2 = k$ 有 3 个实数解, 令 $h(x) = e^x \cdot x^2$, 对 $h(x)$ 求导判断单调性, 作出函数图象, 数形结合即可判断选项 D, 进而可得正确选项.

【详解】由 $f(x) = e^x \cdot x^3$ 可得 $f'(x) = e^x \cdot x^3 = e^x \cdot x^3 + e^x \cdot 3x^2 = e^x \cdot x^2(x+3)$,

由 $f'(x) > 0$ 可得: $x > -3$, 由 $f'(x) < 0$ 可得: $x < -3$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 单调递减, 在 $(-3, +\infty)$ 单调递增, 故选项 A 不正确;

对于选项 B: $f(-\log_5 0.2) = f\left(-\log_5 \frac{1}{5}\right) = f(1)$, $f(x)$ 在 $(-3, +\infty)$ 单调递增,

因为 $-3 < e^{-\frac{1}{2}} < 1 < \ln \pi$, 所以 $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) < f(1) < f(\ln \pi)$ 即

$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) < f(-\log_5 0.2) < f(\ln \pi)$, 故选项 B 正确;

对于选项 C: 令 $g(x) = f(x) + 1 = e^x \cdot x^3 + 1$, 因为 $g(-3) = e^{-3} \cdot (-3)^3 + 1 = 1 - \frac{27}{e^3} < 0$,

$g(0) = e^0 \cdot 0^3 + 1 = 1 > 0$, $g(-3) \cdot g(0) < 0$, 根据零点存在定理可知存在 $x_0 \in (-3, 0)$ 使得

$g(x_0) = f(x_0) + 1 = 0$, 所以方程 $f(x) = -1$ 有实数解, 故选项 C 正确;

对于选项 D: 方程 $f(x) = kx$ 即 $e^x \cdot x^3 = kx$, 有一根为 $x = 0$, 所以原方程有 4 个根等价于方程

$e^x \cdot x^2 = k$ 有 3 个实数解,

令 $h(x) = e^x \cdot x^2$, 则 $h'(x) = e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x = e^x \cdot x(x+2)$,

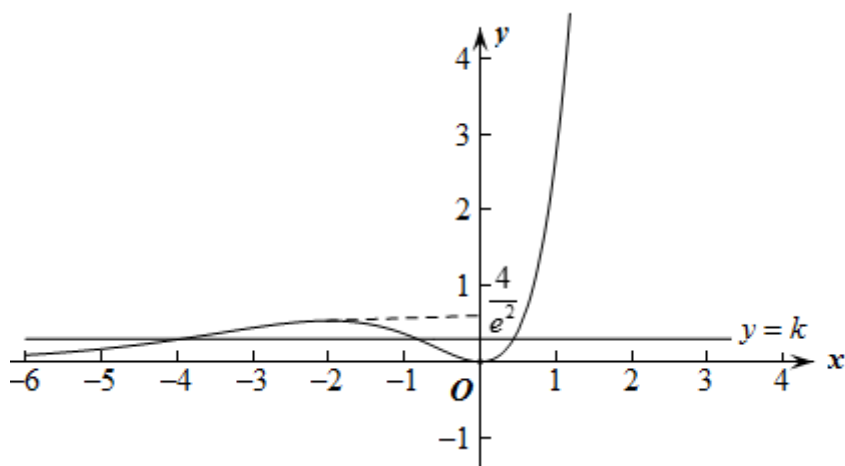
令 $h'(x) = e^x \cdot x(x+2) > 0$ 可得 $x > 0$ 或 $x < -2$,

令 $h'(x) = e^x \cdot x(x+2) < 0$ 可得 $-2 < x < 0$,

所以 $h(x) = e^x \cdot x^2$ 在 $(-\infty, -2)$ 和 $(0, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-2, 0)$ 单调递减,

$$h(-2) = e^{-2} \cdot (-2)^2 = \frac{4}{e^2}, \quad h(0) = e^0 \cdot 0^2 = 0$$

作出 $h(x) = e^x \cdot x^2$ 的图形如图所示： $y = k$



所以存在 $0 < k < \frac{4}{e^2}$ 时，方程 $e^x \cdot x^2 = k$ 有 3 个实数解，此时方程 $f(x) = kx$ 有 4 个实数解.

故选：BCD

非选择题部分（共 90 分）

三、填空题：

13. 已知单位向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 45° ， $k\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. 过直线 $l: x + y - 2\sqrt{2} = 0$ 上一点 P 作圆： $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线的夹角为 60° ，则点 P 的坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【解析】 设切线为 E, F

$\angle EPF = 60^\circ$ 由切线的性质可知 $\angle OPF = 30^\circ$,

因为 $OE \perp PE$, 所以 $OP = 2OE = 2$

设 $P(x, 2\sqrt{2} - x)$, 由 $|OP| = 2 = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{2} - x)^2}$, $x = \sqrt{2}$. 故点 P 的坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

15. 某省派出由 4 名医生、5 名护士组成的医疗小组前往疫区支援, 要求将这 9 名医护人员平均派往某地的 A, B, C 3 家医院, 且每家医院至少要分到一名医生和一名护士, 则不同的分配方案有_____种. (用数字作答)

【答案】1080

【详解】由题可知, 4 名医生要分配到 3 家医院, 且每家医院至少有一名医生, 则必有一家医院有 2 名医生, 其余 2 家医院各有 1 名医生. 假设 A 医院分配的是 2 名医生 1 名护士, 则 B, C 医院均分配 1 名医生 2 名护士, 则分配方案有 $C_4^2 C_5^1 C_2^1 C_4^2 = 360$ (种),

故不同的分配方案有 $360 \times 3 = 1080$ (种). 故答案为: 1080

16. 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, $AP = 3$, $AB = 2\sqrt{3}$, Q 是 BC 边上的一个动点, 且直线 PQ 与面 ABC 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$, 则该三棱锥外接球的表面积为_____.

【答案】 57π

【详解】由题意, 三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , 直线 PQ 与平面 ABC 所成的角为 θ ,

如图所示, 则 $\sin \theta = \frac{PA}{PQ} = \frac{3}{PQ}$, 且 $\sin \theta$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $(PQ)_{\min} = 2\sqrt{3}$, 所以 AQ 的最小值是 $\sqrt{3}$, 即 A 到 BC 的距离为 $\sqrt{3}$,

所以 $AQ \perp BC$, 因为 $AB = 2\sqrt{3}$, 在 $Rt\triangle ABQ$ 中可得 $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$, 即可得 $BC = 6$,

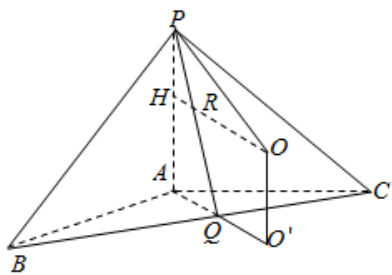
取 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O' , 作 $OO' \parallel PA$,

所以 $\frac{6}{\sin 120^\circ} = 2r$, 解得 $r = 2\sqrt{3}$, 所以 $O'A = 2\sqrt{3}$,

取 H 为 PA 的中点, 所以 $OH = O'A = 2\sqrt{3}$, $PH = \frac{3}{2}$, 由勾股定理得

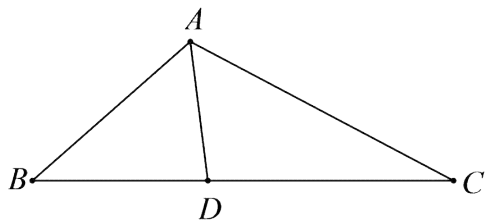
$$OP = R = \sqrt{PH^2 + OH^2} = \frac{\sqrt{57}}{2},$$

所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积是 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{57}}{2}\right)^2 = 57\pi$.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ， $\cos B = \frac{3}{4}$ ，点 D 在 BC 边上， $AD=4$ ， $\angle ADB$ 为锐角．



(1) 若 $AC=6\sqrt{2}$ ，求线段 DC 的长度；

(2) 若 $\angle BAD = 2\angle DAC$ ，求 $\sin C$ 的值．

【答案】(1) 7；(2) $\frac{7\sqrt{14}}{32}$ ．

【详解】(1) 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos B = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{36 + BD^2 - 16}{12 \cdot BD} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore BD = 5$ 或 $BD = 4$ ．

当 $BD = 4$ 时， $\cos \angle ADB = \frac{16 + 16 - 36}{2 \times 4 \times 4} < 0$ ，则 $\angle ADB > \frac{\pi}{2}$ ，不合题意，舍去；

当 $BD = 5$ 时， $\cos \angle ADB = \frac{16 + 25 - 36}{2 \times 4 \times 5} > 0$ ，则 $\angle ADB < \frac{\pi}{2}$ ，符合题意．

$\therefore BD = 5$ ．

在 $\triangle ABC$ 中， $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{36 + BC^2 - 72}{12 \cdot BC} = \frac{3}{4}$ ，

$\therefore BC = 12$ 或 $BC = -3$ （舍）．

$\therefore DC = BC - BD = 7$ ．

(2) 记 $\angle DAC = \theta$, 则 $\angle BAD = 2\theta$. 在 $\triangle ABD$ 中, $\cos \angle BAD = \cos 2\theta = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \frac{9}{16}$,

$\therefore 2\theta$ 为锐角, 得 $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{7}{32}$, $\sin 2\theta = \frac{5\sqrt{7}}{16}$, 即 $\sin \theta = \frac{\sqrt{14}}{8}$, $\cos \theta = \frac{5\sqrt{2}}{8}$,

法一: $\sin 3\theta = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta = \frac{17\sqrt{14}}{64}$, 同理 $\cos 3\theta = \frac{5\sqrt{2}}{64}$.

由 $\cos B = \frac{3}{4}$ 知: $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\therefore \sin C = \sin(\pi - B - 3\theta) = \sin(B + 3\theta) = \sin B \cos 3\theta + \cos B \sin 3\theta = \frac{7\sqrt{14}}{32}$.

法二: $\cos \angle BDA = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{16 + 25 - 36}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8}$, $\sin \angle BDA = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

$\therefore \sin C = \sin(\angle BDA - \theta) = \sin \angle BDA \cos \theta - \cos \angle BDA \sin \theta = \frac{7\sqrt{14}}{32}$.

18. 在① $a_3^2 = a_2 a_4 + 4$, ② $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是公差为 1 的等差数列, ③ $S_4^2 = S_2 \cdot S_8$, 这三个条件中任选一个,

补充到下面的问题中并作答.

问题: 在递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = 1$, _____, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 设 $c_n = a_n \cdot b_n$, T_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和, 求使 $T_n > 2000$ 成立的最小正整数 n 的值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

【答案】 7

【解析】 【详解】 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d > 0$,

若选条件①:

$\therefore a_3^2 = a_2 a_4 + 4$, $\therefore (1 + 2d)^2 = (1 + d)(1 + 3d) + 4$, 解得 $d = \pm 2$ (舍负),

故 $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$;

若选条件②: $\therefore \left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是公差为 1 的等差数列, $\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n - 1) \times 1 = n$, 则 $S_n = n^2$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$, 满足 $a_1 = 1$, $\therefore a_n = 2n - 1$;

若选条件③: $\therefore S_4^2 = S_2 \cdot S_8$, $\therefore (4 + 6d)^2 = (2 + d)(8 + 28d)$, 解得 $d = 0$ (舍去) 或 $d = 2$,

故 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$. 由已知可得 $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$, 则 $c_n = a_n b_n = (2n-1) \cdot 2^n$,

则 $T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \dots + (2n-1) \times 2^n$,

$2T_n = 1 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 5 \times 2^4 + \dots + (2n-1) \times 2^{n+1}$,

两式相减可得 $-T_n = 2 + 2(2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - (2n-1) \times 2^{n+1}$

$$= \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} - 4 - (2n-1)2^{n+1} = (3-2n)2^{n+1} - 6,$$

所以 $T_n = (2n-3) \times 2^{n+1} + 6$,

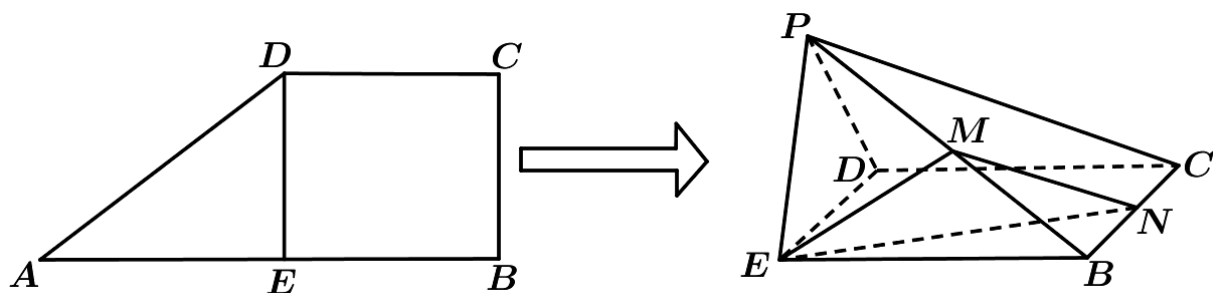
$T_n - T_{n-1} = (2n-3) \times 2^{n+1} + 6 - (2n-5) \times 2^n - 6 = (2n-1) \times 2^n$,

显然, 当 $n \geq 2$ 时, $T_n - T_{n-1} > 0$, 即 $T_n > T_{n-1}$,

又 $T_6 = 9 \times 2^7 + 6 = 1158, T_7 = 11 \times 2^8 + 6 = 2822$,

所以最小正整数 n 的值为 7.

19. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 2DC = 2BC$, E 为 AB 的中点, 沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起, 使得点 A 到点 P 位置, 且 $PE \perp EB$, M 为 PB 的中点, N 是 BC 上的动点(与点 B, C 不重合).



(1) 求证: 平面 $EMN \perp$ 平面 PBC ;

(2) 是否存在点 N , 使得二面角 $B-EN-M$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$? 若存在, 确定 N 点位置; 若不存在, 说明理由.

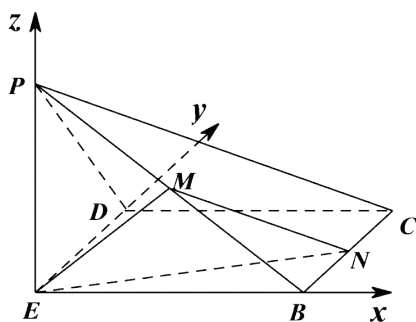
【答案】 (1) 证明见解析; (2) 存在, N 为 BC 的中点.

【详解】 解: (1) 证明: 由 $PE \perp EB$, $PE \perp ED$, $EB \cap ED = E$,

所以 $PE \perp$ 平面 $EBCD$ ，又 $BC \subset$ 平面 $EBCD$ ，故 $PE \perp BC$ ，又 $BC \perp BE$ ，故 $BC \perp$ 平面 PEB ，
 $EM \subset$ 平面 PEB ，故 $EM \perp BC$ ，又等腰三角形 PEB ， $EM \perp PB$ ， $BC \cap PB = B$ ，故 $EM \perp$ 平面 PBC ，
 $EM \subset$ 平面 EMN ，故平面 $EMN \perp$ 平面 PBC ；

(2) 假设存在点 N ，使得二面角 $B - EN - M$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 。

以 E 为原点， $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EP}$ 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，



设 $PE = EB = 2$ ，设 $N(2, m, 0)$ ， $B(2, 0, 0)$ ， $D(0, 2, 0)$ ， $P(0, 0, 2)$ ， $C(2, 2, 0)$ ， $M(1, 0, 1)$ ，

$\overrightarrow{EM} = (1, 0, 1)$ ， $\overrightarrow{EB} = (2, 0, 0)$ ， $\overrightarrow{EN} = (2, m, 0)$ ，设平面 EMN 的法向量为 $\vec{p} = (x, y, z)$ ，

由 $\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{EM} = x + z = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{EN} = 2x + my = 0 \end{cases}$ ，令 $x = m$ ，得 $\vec{p} = (m, -2, -m)$ ，平面 BEN 的一个法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ，

$$\text{故 } \left| \cos \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}|}{|\vec{p}| \times |\vec{n}|} = \frac{|0 + 0 - m|}{\sqrt{m^2 + (-2)^2 + (-m)^2} \times \sqrt{0 + 0 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

解得： $m = 1$ ，故存在 N 为 BC 的中点。

20. 2021 年 4 月 15 日是第 6 个全民国家安全教育日，某社区为增强居民的国家安全意识，举行了国家安全知识竞赛。第一轮比赛共设有四道题，规定，答对第一道题得 1 分，答对第二道题得 2 分，答对第三道题得 3 分，答对第四道题得 6 分，这 4 道题，任意一道答错扣 2 分。每答完一题，分数进行累加，当答题者累计得分低于 -2 分时，停止答题，淘汰；当答题者累计得分大于等于 4 分时，答题结束进入下一轮；当四题答完，累计得分低于四分，则答题结束，淘汰出局；当答完四题，累计得分不低于 4 分时，答题结束，进入下一轮。每位答题者都按题号顺序进行答题，直至答题结束。假设参赛者甲对第一、二、三、四题回答正确的概率依次为 $\frac{3}{5}$ ， $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，且各题回答正确与否相互之间没有影响。

(1) 求甲同学能进入下一轮的概率；

(2) 用 ξ 表示甲同学本轮答题结束时答题的个数, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

【答案】(1) $\frac{9}{40}$; (2) 分布列见解析, $E(\xi) = 3.3$.

【解析】【详解】(1) 由题意, 设事件 $M_i (i=1,2,3,4)$ 表示甲第 i 个问题回答正确,

$N_i (i=1,2,3,4)$ 表示甲第 i 个问题回答错误,

$$\text{则 } P(M_1) = \frac{3}{5}, P(M_2) = \frac{1}{2}, P(M_3) = \frac{1}{3}, P(M_4) = \frac{1}{4};$$

$$P(N_1) = \frac{2}{5}, P(N_2) = \frac{1}{2}, P(N_3) = \frac{2}{3}, P(N_4) = \frac{3}{4}.$$

记事件 Q : 甲同学能进入下一轮的, 则:

$$\begin{aligned} P(Q) &= P(M_1 M_2 M_3) + P(N_1 M_2 M_3 M_4) + P(M_1 N_2 M_3 M_4) + P(M_1 M_2 N_3 M_4) + P(N_1 M_2 N_3 M_4) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{40}, \end{aligned}$$

即甲同学能进入下一轮的, 概率为 $\frac{9}{40}$.

(2) 由题意知 ξ 的可能取值: 2, 3, 4, 则 $P(\xi = 2) = P(N_1 N_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5};$

$$P(\xi = 3) = P(M_1 M_2 M_3) + P(M_1 N_2 N_3) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{10};$$

$$P(\xi = 4) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

所以分布列为

ξ	2	3	4
P	0.2	0.3	0.5

所以期望为 $E(\xi) = 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.5 = 3.3$.

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A, B , O 为坐标原点, 直线 $l: x = 1$

与 C 的两个交点和 O, B 构成一个面积为 $\sqrt{6}$ 的菱形.

(1) 求 C 的方程;

(2) 圆 E 过 O, B , 交 l 于点 M, N , 直线 AM, AN 分别交 C 于另一点 P, Q , 点 S, T 满足 $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SP},$

$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{TQ}$, 求 O 到直线 ST 和直线 PQ 的距离之和的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$; (2) $\frac{27}{11}$.

22. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + a$.

(1) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围;

(2) 设 $g(x) = f(x) + \frac{1}{x}$, 若对任意的 $x \in (0, +\infty)$, 都有 $g(x) \leq e^x$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$; (2) $(-\infty, 1]$.

【解析】

【分析】把函数 $f(x)$ 有两个零点, 转化为 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 与 $y = -a$ 的图象有两个交点, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 利用导数求得函数 $g(x)$ 的单调性与最值, 结合图象, 即可求解;

(2) 根据题意转化为 $a \leq \frac{xe^x - \ln x - 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $F(x) = \frac{xe^x - \ln x - 1}{x}$, 求得

$F'(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$, 令 $h(x) = x^2 e^x + \ln x$, 利用导数求得函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 得到

$\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 进而得出函数 $F(x)$ 的单调性与最值, 即可求解.

【详解】令 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $0 < x < e$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $g'(x) < 0$,

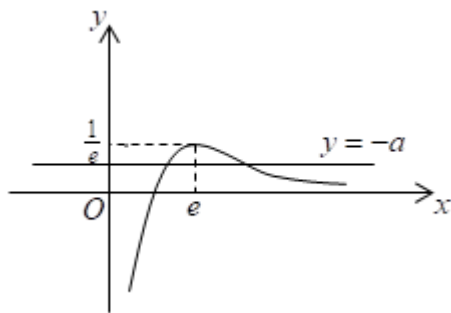
所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x = e$ 时, $g(x) = \frac{1}{e}$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

要使得函数 $f(x)$ 有两个零点, 即 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 与 $y = -a$ 的图象有两个交点, 如图所示,

可得 $0 < -a < \frac{1}{e}$, 即 $-\frac{1}{e} < a < 0$, 此时 $f(x)$ 有两个零点,

所以 $f(x)$ 有两个零点时, a 的范围是 $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$.



(2) 因为对任意的 $x > 0$, 不等式 $g(x) \leq e^x$ 恒成立,

即 $a \leq \frac{xe^x - \ln x - 1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

令 $F(x) = \frac{xe^x - \ln x - 1}{x} (x > 0)$, 则 $F'(x) = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2}$,

令 $h(x) = x^2 e^x + \ln x$, 则 $h'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

又因为 $h(1) = e > 0$, $h\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{e^e}{e^2} - 1 = e^{\frac{1}{e}-2} - 1 < 0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$,

当 $0 < x < x_0$ 时, $h(x) < 0$, 可得 $F'(x) < 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减;

当 $x > x_0$ 时, $h(x) > 0$, 可得 $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(x)_{\min} = F(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - 1}{x_0}$,

由 $x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0$, 可得 $x_0 e^{x_0} = -\frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = \left(\ln \frac{1}{x_0}\right) e^{\ln \frac{1}{x_0}}$,

令 $t(x) = x e^x$, 则 $t(x_0) = t\left(\ln \frac{1}{x_0}\right)$,

又由 $t'(x) = (x+1)e^x > 0$, 所以 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x_0 = \ln \frac{1}{x_0}$, 可得 $\ln x_0 = -x_0$, 所以 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 即 $x_0 e^{x_0} = 1$,

$$\text{所以 } F(x)_{\min} = F(x_0) = \frac{x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - 1}{x_0} = \frac{1 + x_0 - 1}{x_0} = 1, \text{ 所以 } a \leq 1,$$

综上所述，满足条件的 a 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.