

数 学 试 题

命题学校：龙泉中学

命题人：崔冬林

审题人：张建军

本试卷共 2 页，共 22 题。满分 150 分，考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填在答题卡上。

2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在试题卷上无效。

3. 填空题和解答题答在答题卡上每题对应的答题区域内，答在试题卷上无效。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 2^{x-1}, x \in A\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{1, 2\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{1, 2, 4\}$ D. $\emptyset$

2. 若复数 z 同时满足 $z - \bar{z} = 2i$, $\bar{z} = iz$, 则 $z =$

- A. $1-i$ B. i C. $-1-i$ D. $-1+i$

3. 关于直线 $l: ax + by + 1 = 0$, 有下列四个命题:

甲: 直线 l 经过点 $(1, 0)$; 乙: 直线 l 经过点 $(0, -1)$;

丙: 直线 l 经过点 $(-1, 1)$; 丁: $ab < 0$.

若只有一个假命题, 则该命题是

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

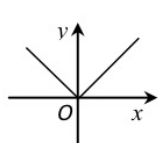
4. 若 $\left(x - \frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 7, 则展开式的常数项为

- A. $\frac{7}{16}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{7}{16}$ D. $-\frac{1}{2}$

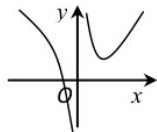
5. 《周髀算经》有这样一个问题: 从冬至日起, 依次小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种十二个节气日影长减等寸, 冬至、立春、春分日影之和为三丈一尺五寸, 前九个节气日影之和为八丈五尺五寸, 问小满日影长为 (1 丈=10 尺=100 寸)

- A. 四尺五寸 B. 三尺五寸 C. 二尺五寸 D. 一尺五寸

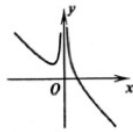
6. 函数 $f(x) = |x| - \frac{m}{x}$ (其中 $m \in R$) 的图像不可能是



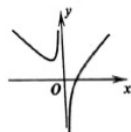
A.



B.



C.



D.

7. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, $3\vec{OA} + 4\vec{OB} + 5\vec{OC} = \vec{0}$, 则 $\cos \angle ABC$ 的值为

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

8. 已知函数 $f(x) = \frac{ae^x}{x} + \ln x - x (a \in \mathbb{R})$, 若 $x \in [1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq -2$, 则实数 a 的取值范围为

- A. $\left[\frac{2}{e^2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{1}{e^3}, +\infty\right)$ C. $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ D. $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = p$, $2S_n - S_{n-1} = 2p (n \geq 2, p \text{ 为常数})$, 则下列结论正确的有

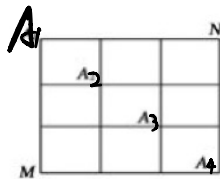
- A. $\{a_n\}$ 一定是等比数列 B. 当 $p = 1$ 时, $S_4 = \frac{15}{8}$
C. 当 $p = \frac{1}{2}$ 时, $a_m \cdot a_n = a_{m+n}$ D. $|a_3| + |a_8| = |a_5| + |a_6|$

10. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} + 2\sin x - \sin 2x$, 则下列结论正确的有

- A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π B. 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 2 个零点
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\pi, \sqrt{3})$ 对称 D. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$

11. 如图, 在某城市中, M, N 两地之间有整齐的方格形道路网, 其中 A_1, A_2, A_3, A_4 是道路网中位于一条对角线上的 4 个交汇处. 今在道路网 M, N 处的甲、乙两人分别要到 N, M 处, 他们分别随机地选择一条沿街的最短路径, 以相同的速度同时出发, 直到到达 N, M 处为止, 则下列说法正确的有

- A. 甲从 M 到达 N 处的方法有 120 种
B. 甲从 M 必须经过 A_3 到达 N 处的方法有 9 种
C. 甲、乙两人在 A_3 处相遇的概率为 $\frac{9}{100}$
D. 甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{41}{100}$



12. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点, 过点 F_1 作渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 的垂线交双曲线右支于点 P , 直线 PF_2 与 y 轴交于点 $Q (P, Q \text{ 在 } x \text{ 轴同侧})$, 连接 QF_1 , 若 $\triangle PQF_1$ 内切圆圆心 I 恰好落在以 F_1F_2 为直径的圆上, 则下列结论正确的有

- A. $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$ B. $\triangle PQF_1$ 内切圆的半径为 $|a - b|$
C. $\overline{OQ} = \sqrt{5} \overline{OI}$ D. 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$

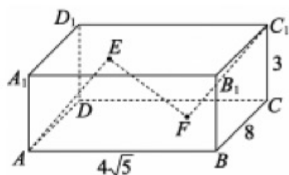
三、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知 α 是三角形的一个内角, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, 则 $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$ _____.

14. 已知 a, b 都为正实数, 则 $a + \frac{b}{a} + \frac{25}{ab}$ 的最小值为 _____.

15. 已知 A, B 两点分别为椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的左焦点和上顶点, C 为椭圆上的动点, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

16. 如图, 长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的长、宽、高分别 $4\sqrt{5}$ 、8、3, E 、 F 分别为上底面、下底面 (含边界) 内的动点, 当 $AE+EF+FC_1$ 最小时, 以 A 为球心, AE 的长为半径的球面与上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的交线长为_____.



四、解答题: (本大题共 6 小题, 共 70 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a , b , c 分别为角 A , B , C 的对边, $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B + \sin A \sin C$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $b = \sqrt{3}$, 求 $2a - c$ 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, $b_1 = 2$, $a_2 = 2b_2 - 1$, $a_3 = b_3 + 2$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

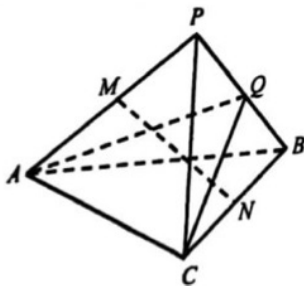
(II) 数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 中的所有项分别构成集合 A , B , 将 $A \cup B$ 的所有元素按从小到大依次排列构成一个新数列 $\{c_n\}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 60 项和 S_{60} .

19. (本小题满分 12 分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $PA = PB = AB = \sqrt{2}AC = \sqrt{2}BC$.

(I) 证明: $PC \perp$ 平面 ABC ;

(II) 已知 Q , M , N 分别为线段 PB 、 PA 、 BC 的中点, 求直线 MN 与平面 QAC 所成角的正弦值.



20. (本小题满分 12 分)

甲、乙、丙三人进行乒乓球挑战赛 (其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局结束时, 负方在下一局当裁判), 设在情况对等中各局比赛双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 但每局比赛结束时, 胜的一方在下一局

比赛时受体力影响, 胜的概率均变为 $\frac{2}{5}$, 第一局甲当裁判.

(I) 求第三局甲当裁判的概率;

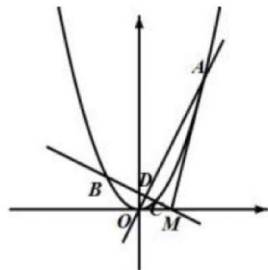
(II) 设 X 表示前四局乙当裁判的次数, 求 X 的分布列和数学期望.

21. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $E: x^2 = 2y$, 过抛物线上第一象限的点 A 作抛物线的切线, 与 x 轴交于点 M . 过 M 作 OA 的垂线, 交抛物线于 B, C 两点, 交 OA 于点 D .

(I) 求证: 直线 BC 过定点;

(II) 若 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} \geq 5$, 求 $|AD| \cdot |AO|$ 的最小值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} - \ln x + 1$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$).

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 记 $f(x)$ 的极值点为 x_0 , 求证: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2ef(x_0)$.